FYSA242 STATISTINEN FYSIIKKA OSA B
Tentti pe 19.02.2010

1. Lämpötila-alueella 700-730 K magnesiumin höyrynpainetta voidaan approksimoida lausekkeella $\ln\frac{P}{P_0} = -\frac{T_0}{T}$, missä $P_0 = 53.1$ GPa ja $T_0 = 17269$ K. Mikä on magnesiumin moolia kohti laskettu sublimoitumislämpö tällä lämpötila-alueella?

2. Kaksiatomisen molekyylin värähtelyjä voidaan hyvällä tarkkuudella pitää harmonisina värähtelyinä, joihin liittyy kulmataajuus ω. Harmonisen värähtelijän energiatilat ovat kvantittuneet siten, että
$$\varepsilon_r = \left(r + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega; \qquad r = 0, 1, 2, \ldots$$
Johda lauseke tällaisista molekyyleistä muodostuvan kaasun sisäisistä värähtelyvapausasteista tulevalle kontribuutiolle kaasun lämpökapasiteettiin. Minkä muodon tämä kontribuutio saa rajoilla $T \ll \hbar\omega$ ja $T \gg \hbar\omega$?

3. Kaksiatomisen molekyylin $(2\ell + 1)$-kertaisesti degeneroitujen rotaatiotilojen energiat ovat kvantittuneet siten, että
$$\varepsilon_\ell = \frac{\hbar^2}{2I}\ell(\ell + 1); \qquad \ell = 0, 1, 2, \ldots,$$
missä I on molekyylin hitausmomentti. Vetymolekyylien hitausmomentti on $I = 4.7 \times 10^{-48}\mathrm{m^2kg}$. Laske tämän molekyylin rotaatiolämpötila T_{rot}. Tarkastele vetymolekyylien rotaatiotilojen kontribuutiota vetykaasun moolia kohti laskettuun lämpökapasiteettiin rajalla $T \ll T_{rot}$. Laske erityisesti tämä kontribuutio lämpötilassa $T = 10$ K.

4. Oletetaan, että kidevärähtelyjen vapaa energia saadaan N:n atomin muodostamalle kiteelle Einsteinin mallin mukaisesta lausekkeesta
$$F = -3Nk_BT\ln\left(\sum_{j=0}^{\infty} e^{-\beta\varepsilon_j}\right),$$
jossa kidevärähtelyjen energiatilat ovat $\varepsilon_j = \hbar\omega_0(j + \frac{1}{2})$. Laske kidevärähtelyjen lämpökapasiteetti.

5. Mustan kappaleen säteilyä voidaan tarkastella ideaalisena bosonikaasuna (fotonikaasuna), jonka hiukkaslukumäärä ei pysy vakiona. Energian $\hbar\omega$ omaavien fotonien keskimääräinen lukumäärä $\langle n(\omega)\rangle$ noudattaa siten Bosen-Einsteinin statistiikkaa tapauksessa $\mu = 0$. Samoin fotonien välillä $[\omega, \omega + d\omega]$ olevien tilojen lukumäärä on $f(\omega)d\omega = \frac{V}{\pi^2c^3}\omega^2 d\omega$. Johda lauseke mustan kappaleen säteilyn energiatiheydelle $u(\omega, T)d\omega$ ja osoita, että kokonaisenergiatiheys $u(T) = \int_0^\infty u(\omega, T)d\omega$ on verrannollinen T^4:een.

6. Ideaalisen fermionikaasun energiatilojen lukumäärä välillä $[\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon]$ on $f(\varepsilon)d\varepsilon = 4\pi V h^{-3}(2m)^{3/2}\varepsilon^{1/2}d\varepsilon$, missä V on järjestelmän tilavuus, m fermionien massa ja h Planckin vakio. Osoita, että fermienergia ε_F on
$$\varepsilon_F = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{3}{\pi}\cdot\frac{N}{V}\right)^{2/3}$$
tarkastelemalla fermionien lukumäärää nollalämpötilassa. Osoita edelleen, että nollalämpötilassa fermionikaasun sisäenergia on $E = \frac{3}{5}N\varepsilon_F$.