FYSA242 STATISTINEN FYSIIKKA OSA B
Tentti pe 24.10.2010

1. Veden höyrynpaine lämpötiloissa $T = 4°C$, $5°C$ ja $6°C$ on vastaavasti 813 Pa, 872 Pa ja 935 Pa. Mikä on veden moolia kohti laskettu höyrystymislämpö lämpötilassa $T = 5°C$?
   Vihje: käyttämällä lausekkeelle $\frac{dP}{dT} = f(P,T)$ kolmen tasavälisen pisteen diskretointia (T_1, T_2, T_3 siten, että $\Delta T = 1K$), saat sille arvion $\frac{1}{2K}(P_3 - P_1) = f(P_2, T_2)$.

2. Hiilidioksidimolekyylillä on mm. sellaiset degeneroitumattomat värähtelytilat, joiden energiat ovat
$$\varepsilon_r = \hbar\omega(r+1); \qquad r = 0, 1, 2, \ldots,$$
   missä $\omega = 1.26 \times 10^{14}\ s^{-1}$. Mikä on näiden tilojen kontribuutio hiilidioksidikaasun moolia kohti laskettuun lämpökapasiteettiin lämpötilassa $T = 400$ K?

3. Kaksiatomisen molekyylin $(2\ell + 1)$-kertaisesti degeneroitujen rotaatiotilojen energiat ovat kvantittuneet siten, että
$$\varepsilon_\ell = \frac{\hbar^2}{2I}\ell(\ell+1); \qquad \ell = 0, 1, 2, \ldots,$$
   missä I on molekyylin hitausmomentti. Vetymolekyylien hitausmomentti on $I = 4.7 \times 10^{-48} m^2 kg$. Laske tämän molekyylin rotaatiolämpötila T_{rot}. Tarkastele vetymolekyylien rotaatiotilojen kontribuutiota vetykaasun moolia kohti laskettuun lämpökapasiteettiin rajalla $T \ll T_{rot}$. Laske erityisesti tämä kontribuutio lämpötilassa $T = 10$ K.

4. Oletetaan, että kidevärähtelyjen vapaa energia saadaan Einsteinin mallin mukaisesta lausekkeesta
$$F = -3Nk_BT \ln\left(\sum_{j=0}^{\infty} e^{-\beta\varepsilon_j}\right),$$
   jossa kidevärähtelyjen energiatilat ovat $\varepsilon_j = \hbar\omega_0(j + \frac{1}{2})$. Laske kidevärähtelyjen lämpökapasiteetti.

5. Mustan kappaleen säteilyä voidaan tarkastella ideaalisena bosonokaasuna (fotonikaasuna), jonka hiukkaslukumäärä ei pysy vakiona. Energian $\hbar\omega$ omaavien fotonien keskimääräinen lukumäärä $< n(\omega) >$ noudattaa siten Bosen-Einsteinin statistiikkaa tapauksessa $\mu = 0$. Samoin fotonien välillä $[\omega, \omega + d\omega]$ olevien tilojen lukumäärä on $f(\omega)d\omega = \frac{V}{\pi^2 c^3}\omega^2 d\omega$. Johda lauseke mustan kappaleen säteilyn fotonitiheydelle (lukumäärätiheydelle) $n =< N > /V$ lämpötilan T funktiona. Mikä on avaruudessa esiintyvän ns. kolmen kelvinin taustasäteilyn fotonitiheys, kun se mittaustulosten mukaan on mustan kappalen säteilyä, jonka lämpötila on 2,7 K? Vihje: $\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} \approx 2,4$.

6. Kun $T \ll T_F$, mielivaltaiselle integroituvalle funktiolle $\phi(\varepsilon)$ voidaan johtaa ns. Sommerfeldin kehitelmä
$$\int_0^\infty \frac{\phi(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} = \int_0^\mu \phi(\varepsilon)d\varepsilon + \frac{\pi^2}{6}(k_BT)^2 \frac{d\phi(\varepsilon)}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=\mu} + \cdots .$$
   Johda tämän kehitelmän avulla ideaalisen fermikaasun kemialiselle potentiaalille lämpötilassa $T \ll T_F$ pätevä tulos
$$\mu(T) \simeq \varepsilon_F\left(1 - \frac{\pi^2}{12}(\frac{T}{T_F})^2\right).$$

Mahdollisesti hyödyllisiä tietoja

$$k_B = 1.3805 \times 10^{-23}\ \mathrm{JK}^{-1} \qquad k_B \cdot 300\ \mathrm{K} \approx \frac{1}{40}\ \mathrm{eV} \qquad R = 8.3143\ \mathrm{J/molK}$$

$$0\ ^\circ\mathrm{C} = 273.15\ \mathrm{K} \qquad c = 3 \times 10^8\ \mathrm{m/s} \qquad m_e c^2 = 511\ \mathrm{keV}$$

$$1\ \mathrm{atm} = 1.013 \times 10^5\ \mathrm{Nm}^{-2} \qquad g = 9.81\ \mathrm{ms}^{-2} \qquad \hbar = 1.0545 \times 10^{-34}\ \mathrm{Js}$$

$$\mathrm{d}E = đQ + đW \qquad \mathrm{d}E = T\mathrm{d}S - P\mathrm{d}V \qquad \mathrm{d}E = T\mathrm{d}S - P\mathrm{d}V + \mu\mathrm{d}N$$

$$S = k_B \ln \Omega \qquad \ln n! \sim n \ln n - n \qquad \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$S = -k_B \sum_r p_r \ln p_r \qquad p_r = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_r} \qquad Z = \sum_r e^{-\beta E_r} \qquad \beta = 1/k_B T$$

$$G = E - TS + PV \qquad F = E - TS \qquad F = -k_B T \ln Z \qquad E = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z$$

$$PV = N k_B T = nRT \qquad \left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T}\right)_{\mathrm{cx}} = \frac{\Delta S}{\Delta V} = \frac{L_{12}}{T \Delta V}$$

$$Z_{\mathrm{cl}} = \frac{1}{N!} Z_1^N \qquad Z_1^{\mathrm{tr}} = V\left(\frac{m k_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \qquad P(v)\mathrm{d}v = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m}{k_B T}\right)^{3/2} v^2 \exp\left[\frac{-mv^2}{2k_B T}\right]\mathrm{d}v$$

$$p_{N,r} = \frac{1}{\mathcal{Z}} e^{\beta(\mu N - E_{N,r})} \qquad \mathcal{Z} = \sum_{N,r} e^{\beta(\mu N - E_{N,r})} \qquad \Omega = -k_B T \ln \mathcal{Z} = E - TS - \mu N = -PV$$

$$\mathcal{Z} = \prod_r \mathcal{Z}_r = \prod_r \sum_{n_r=0}^{\infty} e^{\beta(\mu - \epsilon_r) n_r} \qquad \langle n_r \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_r - \mu)} \pm 1}$$

$$u(\omega, T)\mathrm{d}\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3 \mathrm{d}\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \qquad \mu = \epsilon_F\left[1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{T}{T_F}\right)^2 + \ldots\right] \qquad k_B T_C \approx 3.3 \times \frac{\hbar^2}{m}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}$$

$$f(x,y,z) = 0 \quad \text{"}\Rightarrow\text{"} \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1 \quad \text{ja} \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = 1$$

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \qquad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1) \qquad e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots \qquad (1+x)^q = 1 + qx + \frac{1}{2!}q(q-1)x^2 + \ldots$$