

1. Vastaa lyhyesti seuraaviin kysymyksiin:

- (1p.) Mikä on Dulongin-Petit'n laki?
- (1p.) Mikä on musta kappale?
- (1p.) Mikä on energian tasajakauma eli ekvipartitio?
- (1p.) Miten mikrokanoninen joukko vuorovaikuttaa ympäristön kanssa? Entä suurkanoninen joukko?
- (1p.) Miksi energiatilojen jatkumoapproksimaatio pettää matalissa lämpötiloissa ideaaliselle bosonikaasulle?
- (1p.) Mikä on Debyen taajuus?
- (1p.) Mitä tarkoitetaan tilatiheydellä?

- (2p.) Missä lämpötiloissa kiteen lämpökapasiteettia kuvaa $C_V = \gamma T + \alpha T^3$? Mistä kahdesta fysikaalisesta ilmiöstä termit tulevat?
 - (2p.) Piirrä kaksiatomisten molekyylien ideaalikaasun lämpökapasiteetti C_V kvalitatiivisesti lämpötilan funktiona välillä 0 – 10000 K. Selitä kuvaajan sisältö lyhyesti.
 - (3p.) Tiedetään, että mustan kappaleen säteilyn onkalon seinämiin kohdistama paine on $P = \epsilon(T)/3$, missä $\epsilon(T) = E/V$ on säteilyn energiatiheys. Johda säteilyn entropialle tulokset

$$S = \frac{4}{3}V \frac{\epsilon(T)}{T}, \quad S = \left(\frac{V}{3}\right) \left(\frac{d\epsilon(T)}{dT}\right),$$

ja päättele näiden avulla Stefanin-Boltzmannin laki $\epsilon \sim T^4$ säteilyn energiatiheyden riippuvuudelle lämpötilasta.

- (3p.) Sovella Stefanin-Boltzmannin lakia säteilyteholle pinta-alayksikköä kohden, $P = \sigma T^4$. Laske Maan lämpötila olettaen, että Auringosta tuleva säteily ja maan emittoima säteily ovat tasapainossa. Auringon säde on 6.96×10^8 m, Maan säde on 6.38×10^6 m ja maan radan säde on noin 1.50×10^{11} m. Auringon lämpötila on 5780 K. Stefanin-Boltzmannin vakio on $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$ W/m²K⁴.
- (4p.) Tarkastele järjestelmää lämpö- ja hiukkaskylvyssä, ja johda suurkanoninen todennäköisyysjakauma. Toisin sanoen, osoita, että tilan jonka energia on E_n ja hiukkasluku N_n todennäköisyys on

$$p(n) = \frac{e^{-\beta(E_n - \mu N_n)}}{\mathcal{Z}}, \quad \mathcal{Z} = \sum_n e^{-\beta(E_n - \mu N_n)}.$$

missä \mathcal{Z} on suurkanoninen partitiofunktio.

- (3p.) Tarkastele vuorovaikutuksettomia hiukkasia suurkanonisessa ensemblessä. Osoita, että suurkanonien partitiofunktio voidaan kirjoittaa kanonisen partitiofunktion $Z(N, T, V)$ avulla muodossa

$$\mathcal{Z} = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta \mu N} Z(N, T, V)$$

- (3p.) Partitiofunktio relativistiselle hiukkaselle on

$$Z_1 = 8\pi V (hc\beta)^{-3}.$$

Laske suurkanoninen partitiofunktio identtisistä relativisista hiukkasista koostuvalle ideaalikaasulle, ja sitä käyttäen kaasun tilanyhtälö.

4. Mallinnetaan metallin johtavuuselektroneja ideaalisella fermikaasulla. Tiedät tekemistäsi jatkumoap-
proksimaatioista tilojen tiheydelle, että niiden elektronien lukumäärä, joiden energia on välillä $[\epsilon, \epsilon + d\epsilon]$,
on

$$n(\epsilon - \mu)g(\epsilon)d\epsilon = \frac{4\pi V}{\hbar^3} (2m)^{3/2} \frac{\sqrt{\epsilon} d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1}.$$

- (a) (3p.) Tiedetään, että johteessa on N johtavuuselektronia. Osoita, että

$$\epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3}{8\pi} \frac{N}{V} \right)^{2/3}.$$

- (b) (3p.) Olkoon lämpötila $0 < T \ll T_F \equiv \epsilon_F/k_B$. Laske energia E . Voit käyttää Sommerfeldin
ekspansiota

$$\int_0^\infty d\epsilon n(\epsilon - \mu)\phi(\epsilon) = \int_0^\mu d\epsilon \phi(\epsilon) + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \phi'(\mu) + \dots,$$

sekä tietoa, että matalassa lämpötilassa

$$\mu(n, T) = \epsilon_F + \delta\mu = \epsilon_F - \frac{\pi^2}{12} \frac{(k_B T)^2}{\epsilon_F}.$$

Tulokseksi tulee

$$E = \int_0^\infty d\epsilon \epsilon g(\epsilon) n(\epsilon - \mu) = E_0 + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 g(\epsilon_F),$$

missä $E_0 \equiv \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon \epsilon g(\epsilon)$.

- (c) (4p.) Arvioi fermienergian yläpuolelle virittyvien elektronien lukumäärä N_{ex} . Lausu tuloksesi
suhteen T/T_F funktiona, jolloin saat

$$N_{\text{ex}} \sim N \frac{T}{T_F}.$$

Mahdollisesti hyödyllisiä tietoja

$$k_B = 1.3805 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1} \quad k_B \cdot 300 \text{ K} \approx \frac{1}{40} \text{ eV} \quad R = 8.3143 \text{ J/mol K}$$

$$0 \text{ }^\circ\text{C} = 273.15 \text{ K} \quad c = 3 \times 10^8 \text{ m/s} \quad m_e c^2 = 511 \text{ keV}$$

$$1 \text{ atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ Nm}^{-2} \quad g = 9.81 \text{ ms}^{-2} \quad \hbar = 1.0545 \times 10^{-34} \text{ Js}$$

$$dE = \delta Q + \delta W \quad dE = TdS - PdV \quad dE = TdS - PdV + \mu dN$$

$$S = k_B \ln \Omega \quad \ln n! \sim n \ln n - n \quad \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$S = -k_B \sum_r p_r \ln p_r \quad p_r = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_r} \quad Z = \sum_r e^{-\beta E_r} \quad \beta = 1/k_B T$$

$$G = E - TS + PV \quad F = E - TS \quad F = -k_B T \ln Z \quad E = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z$$

$$PV = Nk_B T = nRT \quad \left(\frac{dP}{dT}\right)_{\text{cx}} = \frac{\Delta S}{\Delta V} = \frac{L_{12}}{T\Delta V}$$

$$Z_{\text{cl}} = \frac{1}{N!} Z_1^N \quad Z_1^{\text{tr}} = V \left(\frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \quad P(v)dv = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m}{k_B T}\right)^{3/2} v^2 \exp\left[-\frac{mv^2}{2k_B T}\right] dv$$

$$p_{N,r} = \frac{1}{Z} e^{\beta(\mu N - E_{N,r})} \quad Z = \sum_{N,r} e^{\beta(\mu N - E_{N,r})} \quad \Omega = -k_B T \ln Z = E - TS - \mu N = -PV$$

$$Z = \prod_r Z_r = \prod_r \sum_{n_r=0}^{\infty} e^{\beta(\mu - \epsilon_r)n_r} \quad \langle n_r \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_r - \mu)} \pm 1}$$

$$u(\omega, T) d\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \quad \mu = \epsilon_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F}\right)^2 + \dots\right] \quad k_B T_C \approx 3.3 \times \frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}$$

$$f(x, y, z) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1 \quad \text{ja} \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = 1$$

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots \quad (1+x)^q = 1 + qx + \frac{1}{2!}q(q-1)x^2 + \dots$$

H₂O paineessa 1 atm:

sulamislämpö 335 kJ/kg

höyrystymislämpö 2260 kJ/kg

0 °C:ssa veden tiheys 0.9999 g/cm³ ja jään tiheys 0.9168 g/cm³

100 °C:ssa veden tiheys 0.9588 g/cm³ ja höyryn tiheys 0.0005977 g/cm³