FYSA242 Statistinen fysiikka tentti: 4 tehtävää, 4 tuntia

1. Vastaa lyhyesti seuraaviin kysymyksiin:
   (a) (1p.) Mikä on Dulongin-Petit'n laki?
   (b) (1p.) Millä ehdoilla kaasu on klassista ideaalikaasua?
   (c) (1p.) Mikä on energian tasajakauma eli ekvipartitio?
   (d) (1p.) Miten vuorovaikutus ympäristön kanssa eroaa kanonisessa joukossa ja suurkanonisessa joukossa?
   (e) (1p.) Miksi energiatilojen jatkumoapproksimaatio pettää matalissa lämpötiloissa ideaaliselle bosonikaasulle?
   (f) (1p.) Mikä on ultraviolettikatastrofi?
   (g) (1p.) Mikä on fermipinta?

2. (a) (2p.) Missä lämpötiloissa kiteen lämpökapasiteettia kuvaa $C_V = \gamma T + \alpha T^3$? Mistä kahdesta fysikaalisesta ilmiöstä termit tulevat?
   (b) (2p.) Piirrä kaksiatomisten molekyylien ideaalikaasun lämpökapasiteetti C_V kvalitatiivisesti lämpötilan funktiona välillä $0 - 10000$ K. Selitä kuvaajan sisältö lyhyesti.
   (c) (3p.) Johda yhden hiukkasen translaatioliikkeen partitiofunktiolle lauseke $Z_1 = V\left(\frac{mk_BT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}$. (Vihje: jatkumoapproksimaatio **k**-avaruudessa ja $\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}a^{-3/2}$.)
   (d) (3p.) Tiedetään, että mustan kappaleen säteilyn onkalon seinämiin kohdistama paine on $P = \epsilon(T)/3$, missä $\epsilon(T) = E/V$ on säteilyn energiatiheys. Johda säteilyn entropialle tulokset

$$S = \frac{4}{3}V\frac{\epsilon(T)}{T}, \qquad S = \left(\frac{V}{3}\right)\left(\frac{d\epsilon(T)}{dT}\right),$$

   ja päättele näiden avulla Stefanin-Boltzmannin laki $\epsilon \sim T^4$ säteilyn energiatiheyden riippuvuudelle lämpötilasta.

3. (a) (4p.) Tarkastele järjestelmää lämpö- ja hiukkaskylvyssä, ja johda suurkanoninen todennäköisyysjakauma. Toisin sanoen, osoita, että tilan jonka energia on E_n ja hiukkasluku N_n todennäköisyys on

$$p(n) = \frac{e^{-\beta(E_n - \mu N_n)}}{\mathcal{Z}}, \qquad \mathcal{Z} = \sum_n e^{-\beta(E_n - \mu N_n)}.$$

   missä $\mathcal{Z}$ on suurkanoninen partitiofunktio.
   (b) (3p.) Tarkastele vuorovaikutuksettomia hiukkasia suurkanonisessa ensemblessa. Osoita, että suurkanonien partitiofunktio voidaan kirjoittaa kanonisen partitiofunktion $Z(N, T, V)$ avulla muodossa

$$\mathcal{Z} = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta\mu N} Z(N, T, V)$$

   (c) (3p.) Osoita sitten, että klassiselle ideaalikaasulle suuri potentiaali $\Phi = -k_BTe^{\beta\mu}Z_1(T, V)$, missä $Z_1(T, V)$ on yhden hiukkasen kanoninen partitiofunktio. Laske tästä hiukkaslukumäärä $\langle N \rangle$, ja johda ideaalikaasun tilanyhtälö.

4. Mallinnetaan metallin johtavuuselektroneja ideaalisella fermikaasulla. Tiedät tekemistäsi jatkumoapproksimaatioista tilojen tiheydelle, että niiden elektronien lukumäärä, joiden energia on välillä $[\epsilon, \epsilon + d\epsilon)$, on

$$n(\epsilon - \mu)g(\epsilon)d\epsilon = \frac{4\pi V}{\hbar^3}(2m)^{3/2}\frac{\sqrt{\epsilon}d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1}.$$

(a) (3p.) Tiedetään, että johteessa on N johtavuuselektronia. Osoita, että

$$\epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{3}{8\pi}\frac{N}{V}\right)^{2/3}.$$

(b) (3p.) Olkoon lämpötila $0 < T \ll T_F \equiv \epsilon_F/k_B$. Laske energia E. Voit käyttää Sommerfeldin ekspansiota

$$\int_0^\infty d\epsilon n(\epsilon - \mu)\phi(\epsilon) = \int_0^\mu d\epsilon\phi(\epsilon) + \frac{\pi^2}{6}(k_BT)^2\phi'(\mu) + \cdot,$$

sekä tietoa, että matalassa lämpötilassa

$$\mu(n, T) = \epsilon_F + \delta\mu = \epsilon_F - \frac{\pi^2}{12}\frac{(k_BT)^2}{\epsilon_F}.$$

Tulokseksi tulee

$$E = \int_0^\infty d\epsilon\epsilon g(\epsilon)n(\epsilon - \mu) = E_0 + \frac{\pi^2}{6}(kT)^2 g(\epsilon_F),$$

missä $E_0 \equiv \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon\epsilon g(\epsilon)$.

(c) (4p.) Arvioi fermienergian yläpuolelle virittyvien elektronien lukumäärä N_{ex}. Lausu tuloksesi suhteen T/T_F funktiona, jolloin saat

$$N_{\text{ex}} \sim N\frac{T}{T_F}.$$

Mahdollisesti hyödyllisiä tietoja

$$k_B = 1.3805 \times 10^{-23}\ \mathrm{JK}^{-1} \qquad k_B \cdot 300\ \mathrm{K} \approx \frac{1}{40}\ \mathrm{eV} \qquad R = 8.3143\ \mathrm{J/mol\,K}$$

$$0\ ^\circ\mathrm{C} = 273.15\ \mathrm{K} \qquad c = 3 \times 10^8\ \mathrm{m/s} \qquad m_e c^2 = 511\ \mathrm{keV}$$

$$1\ \mathrm{atm} = 1.013 \times 10^5\ \mathrm{Nm}^{-2} \qquad g = 9.81\ \mathrm{ms}^{-2} \qquad \hbar = 1.0545 \times 10^{-34}\ \mathrm{Js}$$

$$\mathrm{d}E = \text{đ}Q + \text{đ}W \qquad \mathrm{d}E = T\mathrm{d}S - P\mathrm{d}V \qquad \mathrm{d}E = T\mathrm{d}S - P\mathrm{d}V + \mu\mathrm{d}N$$

$$S = k_B \ln\Omega \qquad \ln n! \sim n\ln n - n \qquad \binom{n}{m} = \frac{n!}{n!(n-m)!}$$

$$S = -k_B \sum_r p_r \ln p_r \qquad p_r = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_r} \qquad Z = \sum_r e^{-\beta E_r} \qquad \beta = 1/k_B T$$

$$G = E - TS + PV \qquad F = E - TS \qquad F = -k_B T \ln Z \qquad E = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z$$

$$PV = Nk_B T = nRT \qquad \left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T}\right)_{\mathrm{cx}} = \frac{\Delta S}{\Delta V} = \frac{L_{12}}{T\Delta V}$$

$$Z_{\mathrm{cl}} = \frac{1}{N!} Z_1^N \qquad Z_1^{\mathrm{tr}} = V\left(\frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \qquad P(v)\mathrm{d}v = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m}{k_B T}\right)^{3/2} v^2 \exp\left[\frac{-mv^2}{2k_B T}\right]\mathrm{d}v$$

$$p_{N,r} = \frac{1}{\mathcal{Z}} e^{\beta(\mu N - E_{N,r})} \qquad \mathcal{Z} = \sum_{N,r} e^{\beta(\mu N - E_{N,r})} \qquad \Omega = -k_B T \ln \mathcal{Z} = E - TS - \mu N = -PV$$

$$\mathcal{Z} = \prod_r \mathcal{Z}_r = \prod_r \sum_{n_r=0}^{\infty} e^{\beta(\mu-\varepsilon_r)n_r} \qquad \langle n_r \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_r-\mu)} \pm 1}$$

$$u(\omega,T)\mathrm{d}\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\frac{\omega^3 \mathrm{d}\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1} \qquad \mu = \varepsilon_F\left[1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{T}{T_F}\right)^2 + \ldots\right] \qquad k_B T_C \approx 3.3 \times \frac{\hbar^2}{m}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}$$

$$f(x,y,z) = 0 \quad \text{"}\Rightarrow\text{"} \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1 \quad \text{ja} \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = 1$$

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \qquad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots \qquad (1+x)^q = 1 + qx + \frac{1}{2!}q(q-1)x^2 + \ldots$$

H_2O paineessa 1 atm:

- sulamislämpö 335 kJ/kg
- höyrystymislämpö 2260 kJ/kg
- 0 °C:ssa veden tiheys 0.9999 g/cm^3 ja jään tiheys 0.9168 g/cm^3
- 100 °C:ssa veden tiheys 0.9588 g/cm^3 ja höyryn tiheys 0.0005977 g/cm^3