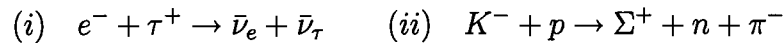


Tentti, 5 tehtävää, 4h. Palauta kysymyspaperit ja taulukot vastauspaperisi mukana!

1. a) Seuraavat reaktiot ovat kiellettyjä. Mitä säilymlakia kukin prosessi rikkoo?



- b) Minkä vuorovaikutuksen kautta seuraavat reaktiot tapahtuvat? Piirrä ensimmäisestä yksi mahdollinen kvarkkidiagrammi ja jälkimmäisestä yksi mahdollinen Feynmanin diagrammi. Nimeä graafiesi hiukkaset ja merkitse niihin myös asiaankuuluvat nuolet.



- c) Neutraali mesoni π^0 (joka on $q\bar{q}$ -tyylinen tila) hajoaa kanavaan $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$, kun taas hajoamisia kanavaan $\pi^0 \rightarrow 3\gamma$ ei ole havaittu. Mitä tämän perusteella osaat päätellä π^0 -mesonin ja fotonin C -pariteeteista?
- d) Mikä prosessi on syvä epäelastinen leptoni-protonisironna (DIS)? Mikä on DIS-mittausten päätavoite?
- e) Millaiseen partonimallin prosessiin ja millaiseen lopputilaan perustuen topkvarkki löydettiin Fermilabin Tevatronin $p\bar{p}$ -törmäyksissä? Vastaukseksi riittää tässä yksi graafi (selityksineen), jossa näkyy $t\bar{t}$ -parin tuotto partonimallisessa, kyseisten raskaiden kvarkkien hajoaminen sekä tyypillinen mitattava lopputila.
- f) Mikä on Cabibbon kulma?

2. DESY-laboratorion HERA-kiihdyttimellä tehtiin törmäävien suihkujen elektroni-protoni -törmäyksiä, joissa elektronin energia oli $E_1 = 30$ GeV ja protonin energia $E_2 = 920$ GeV. Tarkastellaan tässä elastista prosessia $e + p \rightarrow e + p$ kyseisissä törmäyksissä. Oletetaan, että systeemin CMS-koordinaatistossa havaitaan elektronin sironneen kulmaan $\theta_3^* = 120^\circ$ (siis $\cos \theta_3^* = -\frac{1}{2}$). Lähtien Mandelstamin muuttujien määrittelmistä, laske mitkä ovat elektronin sirontakulma θ_3 , protonin sirontakulma θ_4 , sironneen elektronin energia E_3 ja sironneen protonin energia E_4 siinä koordinaatistossa, jossa suihkuhiukkasten energiat ovat yllä mainitut E_1 ja E_2 . Lausu θ_3 , θ_4 , E_3 ja E_4 energioiden E_1 ja E_2 avulla. Laske lopuksi lukuarvot saamillesi tuloksille ja hahmottele myös törmäyskinematiikkakuvat näissä kahdessa eri koordinaatistossa. Sovitaan, että koska $m_e, m_p \ll E_1, E_2$, voimme asettaa hiukkasten massat tässä tehtävässä nolliksi.

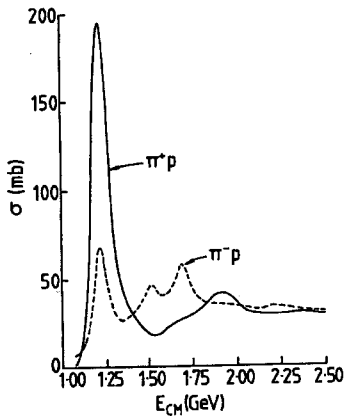
3. Muistamme, että isospin-formalismissa pionit muodostavat tripletin

$$\begin{aligned} |\pi^+\rangle &= -|I=1, I_3=+1\rangle \\ |\pi^0\rangle &= |I=1, I_3=0\rangle \\ |\pi^-\rangle &= |I=1, I_3=-1\rangle \end{aligned}$$

ja nukleonit tupletin

$$\begin{aligned} |p\rangle &= |I=\frac{1}{2}, I_3=+\frac{1}{2}\rangle \\ |n\rangle &= |I=\frac{1}{2}, I_3=-\frac{1}{2}\rangle. \end{aligned}$$

Tarkastellaan nyt pioni-nukleoni -sirontojen kokonaisvaikutusaloja CMS-energia-alueessa $\sqrt{s} < 1.4$ GeV. Selitä isospin-symmetriaan nojautuen oheisen kuvan mitaustulos kohdassa $\sqrt{s} = 1232$ MeV,



$$\frac{\sigma^{\pi^+p}(\sqrt{s} = 1232 \text{ MeV})}{\sigma^{\pi^-p}(\sqrt{s} = 1232 \text{ MeV})} \approx 3,$$

kun tiedetään seuraavaa (luennoilla todettua):

- i) Tässä CMS-energia-alueessa kokonaisvaikutusaloja σ^{π^+p} hallitsee elastinen sironta, kun taas kokonaisvaikutusaloissa σ^{π^-p} täytyy elastisen sironnan lisäksi huomioida prosessi $\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$.
- ii) Resonanssisironnan $a + b \rightarrow R \rightarrow c + d$ vaikutusala on muotoa

$$\sigma(\sqrt{s}) = K \frac{\Gamma_i(R \rightarrow ab)\Gamma_f(R \rightarrow cd)}{(\sqrt{s} - M_R)^2 + \Gamma_{\text{TOT}}^2/4},$$

missä M_R on resonanssihiidun massa ja missä hajoamislevyydet ovat kunkin hajoamisen sirontamatriisielementin neliön avaruuskulmaintegraaleja, $\Gamma(R \rightarrow eg) = K' \int d\Omega |\langle eg | \hat{T} | R \rangle|^2$. Massoista ja alkutilan liikemääristä riippuvia kinemaattisia tekijöitä on merkitty K :lla ja K' :lla.

- iii) Muodostuva resonanssi on Δ -resonanssi, joka kussakin prosessissa on jokin $I = \frac{3}{2}$ isospin-multipletin $\Delta^{++}(I_3 = +\frac{3}{2})$, $\Delta^+(I_3 = +\frac{1}{2})$, $\Delta^0(I_3 = -\frac{1}{2})$, $\Delta^-(I_3 = -\frac{3}{2})$ jäsenistä.
- iv) $\Delta(1232)$ -resonanssit hajoavat käytännössä vain pioni-nukleoni -kanaviin.

4. Tarkastellaan teoriaa, jonka Lagrangen tiheys on

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - m^2\phi^*\phi - \lambda^2(\phi^*\phi)^2,$$

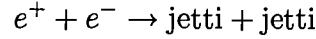
missä $m^2, \lambda^2 > 0$ ja ϕ on paikan 4-vektorista x riippuva kompleksinen skalaarikenttä, joka kuvaa varattua m -massaista spin-0 -hiukkasta. Sovitaan, että ko. hidun nimi on f^- ja sen antihidun f^+ . Fotonia γ kuvaava mittakenttä on A_μ , ja siihen liittyvä kenttätensori on $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Kenttä ϕ muuntuu lokaaleissa $U(1)$ -mittamuunnoksissa seuraavasti: $\phi \xrightarrow{U(x)} \phi(x)' = U(x)\phi(x)$, missä $U(x) = e^{i\alpha(x)}$ ja $\alpha(x)$ on jokin reaalin funktio. Teoria on rakennettu siten, että kovariantilta derivaatalta $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ vaaditaan muuntuminen ko. muunnoksissa seuraavasti: $D_\mu\phi \xrightarrow{U(x)} U(x)D_\mu\phi(x)$. Oletetaan, että teorian kytkinvakiot e ja λ ovat samaa suuruusluokkaa.

- Johda mittakentän muunnoslaki lokaaleissa $U(1)$ -mittamuunnoksissa. Tämän jälkeen näytä (mahdollisimman lyhyellä laskulla!), että kyseessä todella on lokaalisti $U(1)$ -mittasymmetrinen teoria.
- Identifioi ko. teorian vuorovaikutustermit ja piirrä kutakin vuorovaikutustermiä vastaava perusverteksi.
- Piirrä sironnalle

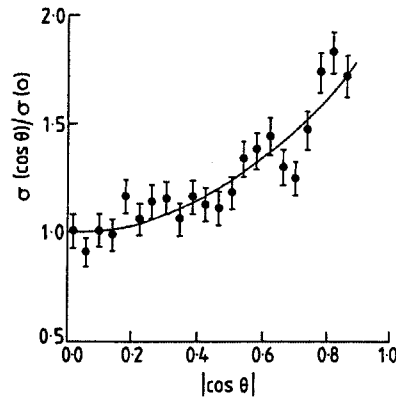
$$f^+ + f^- \rightarrow \text{fotoni} + \text{fotoni}$$

kaikki ko. teorian mukaiset Feynmanin graafit kytkinvakioiden alimmassa mahdollisessa kertaluvussa. Selvitä piirtämiesi graafien perusteella prosessin invariantin amplitudin \mathcal{M} ja vaikutusalan riippuvuus kytkinvakioista.

5. Alla olevassa kuvassa on DESY-laboratorion CELLO-kokeen mittaustulos polarisoitumattoman sironnan



jettien kulmajakaumalle CMS-koordinaatistossa.



Lähtien Feynmanin säännöistä laske kyseisen prosessin differentiaalinen vaikutusala $d\sigma/d\cos\theta^*$ sähkömagneettisen vuorovaikutuksen alimmassa kertaluvussa. Lausu lopputulos CMS-koordinaatiston sirontakulman θ^* , hienorakennevakion $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ ja CMS-energian \sqrt{s} avulla, kun \sqrt{s} on alueessa 15–40 GeV. Tämän jälkeen muodosta oheisessa kuvassa oleva suure

$$\frac{\frac{d\sigma}{d\cos\theta^*}}{\frac{d\sigma}{d\cos\theta^*} \Big|_{\cos\theta^*=0}},$$

vertaa laskusi tulosta mittaustulokseen ja selitä lopuksi lyhyesti, mitä kyseinen mittaus kertoo.

Ohjeita: Tarkastellaan tässä vain suurenergiaarajaa eli voit asettaa alku- ja lopputilan hiukkasten massat nolliksi. Sovitaan seuraavista merkinnöistä laskussasi: positronin 4-liikemäärä olkoon p_a , elektronin p_b , sekä lopputilan fermionin p_c ja antifermionin p_d . Merkitse laskujesi välivaiheet ja perustelut näkyviin vastauspaperiin – ei suttupaperille! Oheisesta liitteestä ja kaavakokoelmasta lienee apua.

Kaavakokoelma

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \hat{=} \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \mathbf{1}_4$$

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$$

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = 4 \mathbf{1}_4$$

$$\gamma_\mu \not{a} \gamma^\mu = -2\not{a}, \text{ where } \not{a} \equiv \gamma_\mu a^\mu$$

$$\gamma_\mu \not{a} \not{b} \gamma^\mu = 4a \cdot b$$

$$\gamma_\mu \not{a} \not{b} \not{c} \gamma^\mu = -2\not{c} \not{b} \not{a}$$

$$\gamma^{5\dagger} = \gamma^5, \text{ where } \gamma^5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$$

$$(\gamma^5)^2 = \mathbf{1}_4$$

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$$

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$$

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho})$$

$$\text{Tr}(\gamma^5) = 0$$

$$\text{Tr}(\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}}) = 0$$

Projection operators for Dirac spinors:

$$\sum_{s=1,2} u^{(s)}(p) \bar{u}^{(s)}(p) = \not{p} + m \qquad \sum_{s=1,2} v^{(s)}(p) \bar{v}^{(s)}(p) = \not{p} - m,$$

$$\text{where } \bar{u} \equiv u^\dagger \gamma^0 \text{ and } \bar{v} \equiv v^\dagger \gamma^0$$

$$\text{Dirac equation: } (\not{p} - m)u(p) = 0 \qquad (\not{p} + m)v(p) = 0$$

Cross section $ab \rightarrow cd$ (when $m_{a,b} = m_{c,d}$):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega^*} = \frac{|\overline{\mathcal{M}}|^2}{64\pi^2 s}$$

Spherical coordinates:

$$\int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d(\cos \theta)$$

C.1 Feynman Rules – General Discussion

External Lines:

For particles in the initial or final state one writes the following factor:

- QED → fermi
- (a) Spin Zero Boson 1
 - (b) Spin One Boson $\epsilon_\mu(\lambda)$
- Here $\epsilon_\mu(\lambda)$ is the polarization 4-vector for a boson with helicity λ . For the case of a massless spin one boson propagating along the \hat{z} -axis with 4-momentum k_μ given by

$$k_\mu = \begin{pmatrix} k_0 \\ 0 \\ 0 \\ k_3 \end{pmatrix} \quad (C.1.1)$$

with $k_0 = |k_3|$, the polarization 4-vectors are given by

$$\epsilon_\mu(\lambda = \pm 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (C.1.2)$$

for helicity ± 1 . The polarization 4-vectors satisfy

$$k \cdot \epsilon = 0, \quad (C.1.3)$$

and

$$\epsilon^2 = -1. \quad (C.1.4)$$

For a massive spin 1 boson with 4-momentum given by (C.1.1) but with $k_0^2 = k_3^2 + M^2$ one also has the longitudinal state

$$\epsilon_\mu(\lambda = 0) = \frac{1}{M} \begin{pmatrix} k_3 \\ 0 \\ 0 \\ k_0 \end{pmatrix}, \quad (C.1.5)$$

where M is the boson mass.

- QED →
- (c) Spin 1/2 fermion of momentum p and spin $s \leftarrow = S_z$
 - in initial state $u(p, s)$ on the right
 - in final state $\bar{u}(p, s)$ on the left
 - (d) Spin 1/2 antifermion of momentum p and spin s
 - in initial state $\bar{v}(p, s)$ on the left
 - in final state $v(p, s)$ on the right

Internal Lines (Propagators):

Each internal line describes a particle of momentum q and mass m . Some examples are as follows: ($\epsilon \rightarrow 0$)

- (a) Spin Zero Boson

$$\frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (C.1.6)$$

- QED → (b) Photon (Feynman Gauge)

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} \quad (C.1.7)$$

- (c) Spin One Boson

$$\frac{-i(g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / m^2)}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (C.1.8)$$

- QED → (d) Spin 1/2 fermion

$$\frac{i(\not{q} + m)}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (C.1.9)$$

For antifermions one uses the same propagator, treating the antifermion as a fermion of opposite 4-momentum (i.e., $-q$).

Vertex Factors:

For each intersection of three (or more) lines at one point there is a vertex factor which depends on the structure of the interaction Lagrangian. Some examples are shown in Fig. C.1.

- (a) Three scalar boson vertex

$$-ig \quad (C.1.10)$$

- QED → (b) $e\bar{e}\gamma$ vertex

$$-ie\gamma_\mu \quad (C.1.11)$$

Here e is the charge of the electron and the fine structure constant $\alpha = e^2/(4\pi)$.

- (c) Charged spin zero boson-photon vertex

$$-iQ(p_1 + p_2)_\mu \quad (C.1.12)$$

- (d) Four point coupling for charged spin zero boson-photon

$$2iQ^2 g_{\mu\nu} \quad (C.1.13)$$

Loops and Combinatorics:

- (a) For each loop with undetermined momentum k $\int d^4k/(2\pi)^4$
Here; the integral runs over all values of the momentum.
- (b) For each closed fermion loop -1
- (c) For each closed loop containing n identical bosons $1/n!$