Kosmologia, kevät 2013, **Välikoe 1.**

HUOM! Ennen kuin alat pinnistellä muistiasi, käy läpi liitteenä oleva kaavakokoelma.

1a. i) Luonnehdi lyhyesti kosmologinen periaate ja mitä siitä seuraa maailmankaikkeuden kehitykselle. ii) Mainitse kolme erilaista kehitysefektiä jotka tukevat dynaamista maailmankaikkeutta. iii) Selitä miten kosmisen etäisyyskaalan kalibrointi vaikuttaa pallomaisten tähtijoukkojen iän määritykseen.

1b. Selitä miten määritellään horisonttietäisyys $d_H(z)$, kulmaetäisyys $d_A(z)$ ja luminositeettietäisyys $d_L(z)$ kaarevassa avaruudessa. (Huomaa että $d_H(z)$ on annettu kaavakokoelmassa; sitä ei tarvitse johtaa. Sen sijaan relaatiot eri etäisyyksien välillä FRW-kosmologiassa ovat tervetulleita.) Missä erikoistapauksissa nämä, tai jotkut näistä etäisyyksistä voivat olla samat?

2. FRW-kosmologiassa jossa $\Omega = \Omega_m$ havaitaan objekti punasiirtymällä z. Laske objektin punasiirtymän muutosnopeus ajan funktiona. Vihje: valoa lähettävä kohde on koko ajan samalla koordinaattietäisyydellä. Muodosta ensin yhteys emissio- ja absorption aikaerotusten vällille ja johda sitten erilliset punasiirtymät eri absorptioajoille. Kuinka suurella suhteellisuudella tarkkuudella pitäisi valon aallonpituus kyetä mittaamaan, jotta maailmankaikkeuden hidastuminen (hidastuvuusparametri $q = -\ddot{a}/aH^2$) nähtäisiin mittaamalla saman kohteen punasiirtymä 10 vuoden välein. (Kertaluvun tarkkuus riittää.)

3. Tarkastellaan FRW-mallia jossa ei ole materiaa eikä säteilyä, mutta on kosmologinen vakio Λ:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G_N}{3}\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{3}\,.$$

Hahmottele nopeus $\dot{a}$ skaalatekijän funktiona tarkastellen erikseen tapauksia $k = 0$, $k = 1$ ja $k = -1$. Tulkitse $\dot{a}^2$ kineettisenä energiana ja kaarevuusvakio kokonaisenergiana ja hahmottele systeemin potentiaalifunktio $V(a)$. Osoita että tapauksessa $k = +1$ skaalatekijällä on minimiarvo. Ratkaise skaalatekijä t:n funktiona ja osoita että kaikissa tapauksissa $H^2 \to \Lambda/3$ kun $t \to \infty$. Oleta nyt että $k = 0$ ja osoita että kaksi pistettä joiden etäisyys on d (mielivaltaisen pieni), tulevat kausaalisesti riippumattomiksi äärellisen ajan $t = t(d, \Lambda)$ kuluttua.

4. Oletetaan että supernovan näennänen magnditudi on $m = 22.22$ ja punasiirtymä $z = 0.4$. Oleta että maailmankaikkeus on laakea ja materiadominoitu, eli $\Omega_m = 1$, ja laske luminositeettietäisyys $d_L(z)$ tässä mallissa, sekä arvioi tuloksesi perusteella $d_L(z = 0.4)$ käyttäen $h = 0.72$. Laske supernovan absoluuttinen magnitudi M ja sen luminositeetti aurinkoon ja linnunrataan verrattuna. (Linnunradan laskennallinen absoluuttinen magnitudi on -20.5.) Mihin suuntaan supernovan näennäinen magnitudi muuttuu, jos lisäät malliin kosmologista vakoita pitäen kuitenkin mallin laakeana?

Kaavakokoelma

Friedmann-Robertson-Walker metriikka:

$$ds^2 = -\mathrm{d}t^2 + a(t)^2 \left(\frac{\mathrm{d}r^2}{1-kr^2} + r^2 \mathrm{d}\theta^2 + r^2 \cos^2\theta \mathrm{d}\varphi^2 \right) . \tag{1}$$

Friedmanin yhtälöt:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G_N}{3}\rho \,, \qquad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G_N}{3}(\rho + 3p) \,. \tag{2}$$

Jatkuvuusyhtälö:

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + p) \,. \tag{3}$$

Absoluuttinen (M) ja näennäinen (m) magnitudi:

$$M = -2.5 \log_{10} \frac{L}{10\mathrm{pc}} + C \,, \qquad m = -2.5 \log_{10} \frac{L}{d_L(z)} + C \,. \tag{4}$$

Vakio C on asettaa magnitudiasteikon nollakohdan. Historiallisin perustein se on määritelty niin että auringolle $M_\odot = 4.72$.

Joitain integraaleja:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z^2 \pm 1}} = \begin{cases} \operatorname{arsinh}(y) - \operatorname{arsinh}(y_0) & (+) \\ \operatorname{arcosh}(y) - \operatorname{arcosh}(y_0) & (-) \end{cases} \tag{5}$$

$$\int_0^r \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} = \arcsin(r) \tag{6}$$

Luminositeettietäisyys:

$$d_L(z) = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{\mathrm{d}z'}{\sqrt{\Omega_{r0}(1+z')^4 + \Omega_{m0}(1+z')^3 + \Omega_{k0}(1+z')^2 + \Omega_{\Lambda 0}}} \tag{7}$$

missä ($\Omega_{k0} \equiv 1 - \Omega_{r0} - \Omega_{m0} - \Omega_{\Lambda 0}$).

Joitain vakoita ja suureita:
$M_{\mathrm{pl}} = 1.22 \times 10^{19}$ GeV/c^2, $c = 3 \times 10^5$km/s.
$H_0 = 100h$ km/s/Mpc, 1Mpc $= 9.46 \times 10^{18}$km. $c/H_0 = 3000/h$ Mpc.