

16 FYSM300 Materials physics I, Materiaalifysiikka I, Final exam, Tentti 21.5.2010

Four hours of time, answer all questions. Neljä tuntia aikaa, vastaa kaikkiin kysymyksiin. Kysymykset suomeksi toisella paperilla! Kysymyksiin saa vastata englanniksi tai suomeksi.

16.1

Explain the mathematical relationship between the following quantities (just the dependence is enough if you don't know the full formula):

- (a) lattice vector \mathbf{R} and reciprocal lattice vector \mathbf{G}
- (b) frequency and wave-vector of an acoustic phonon near Brillouin zone center
- (c) magnetic flux through a superconducting loop (depends only on constants!)
- (d) magnetic susceptibility and temperature for paramagnetic atoms or ions
- (e) total current density and band structure $E(\mathbf{k})$ of a solid
- (f) electron density and temperature in a *doped* semiconductor when $k_B T$ is larger than the dopant binding energy but smaller than gap

16.2

Essay: Phonons and their importance in thermal properties of solids

16.3

(a) Derive the density of states $g(E)$ for a 2D free-electron gas. Hint: You could use the facts that $g(E)dE = g(\mathbf{k})d\mathbf{k}$ and $g(\mathbf{k}) = 2A/(2\pi)^2$, where A is the sample area and \mathbf{k} a 2D wavevector. (b) Calculate the Fermi-energy E_F and the Fermi wave-vector k_F (magnitude) as a function of areal density of electrons $N/A = n$. (c) Draw the Fermi-surface for free 2D electrons in the reciprocal space of a 2D square lattice with valence 2, i.e. two free electrons/atom. Use both the extended zone scheme and the reduced zone scheme (for all Brillouin zones that are occupied), and indicate where the occupied and the empty states are.

16.4

(a) What are the definitions of group velocity and effective mass for an electron in a general 1D band $E(k)$?

(b) Calculate the general expressions (as a function of k vector) for the effective mass $m^*(k)$ and the group velocity $v_g(k)$ for a 1D tight-binding band

$$E(k) = E_i - \alpha_i - 2\beta_i \cos(ka), \quad (40)$$

and evaluate them at $k = \pi/(2a)$. Will the band electron with $k = \pi/(2a)$ move in an applied electric field? Explain.

16.5

Selitä seuraavien suureiden välinen matemaattinen riippuvuus (tarkka kaava ei ole tarpeen):

- (a) Hilavektori \mathbf{R} ja käänteishilavektori \mathbf{G}
- (b) Akustisen fononin taajuus ja aaltovektori lähellä Brillouinin vyöhykkeen keskustaa
- (c) magneettivuo suprajohtavan renkaan läpi (riippuu vain vakioista!)
- (d) magneettinen susceptibiliteetti ja lämpötila paramagneettisille ioneille tai atomeille
- (e) virrantiheys ja kiteen vyörakenne $E(\mathbf{k})$
- (f) seostetun (doped) puolijohteen elektronitiheys ja lämpötila kun $k_B T$ on suurempi kuin seosatomien sidosenergia, mutta pienempi kuin puolijohteen energia-aukko

16.6

Essee: Fononit ja niiden merkitys materiaalien termisiin ominaisuuksiin

16.7

(a) Johda 2D vapaan elektronikaasun tilatiheyden $g(E)$ lauseke. Vinkki: voit esim. käyttää tietoa että $g(E)dE = g(\mathbf{k})d\mathbf{k}$, missä $g(\mathbf{k}) = 2A/(2\pi)^2$, A on näytteen pinta-ala ja \mathbf{k} on siis 2D aaltovektori. (b) laske Fermi-energia E_F ja Fermi aaltovektori k_F (vektorin pituus) elektronien pinta-alatiheyden $N/A = n$ funktiona. (c) Piirrä Fermi-pinta 2D vapaille elektroneille 2D neliöhilan käänteisavaruudessa, jos atomien valenssi on 2 (kaksi vapaata elektronia/atomi). Käytä sekä levitettyä (extended) että kavennettua (reduced) Brillouin-vyöhyke kuvaa. Osoita miehityt ja tyhjät tilat kaikille Brillouinin vyöhykkeille, joissa on elektroneja.

16.8

(a) Mikä on ryhmänopeuden ja efektiivisen massan määritelmä elektronille 1D vyöllä $E(k)$? (b) Johda yleiset lausekkeet (k :n funktiona) efektiiviselle massalle $m^*(k)$ sekä ryhmänopeudelle $v_g(k)$ 1D "tight-binding" vyölle

$$E(k) = E_i - \alpha_i - 2\beta_i \cos(ka), \quad (41)$$

ja laske niiden arvot pisteessä $k = \pi/(2a)$. Liikkuuko elektroni lainkaan tuossa pisteessä? Selitä.