

16 FYSM300 Materials physics I, Materiaalifysiikka I, Final exam, Tentti 27.5.2011

Four hours of time, answer all questions. Neljä tuntia aikaa, vastaa kaikkiin kysymyksiin. Kysymykset suomeksi toisella paperilla! Kysymyksiin saa vastata englanniksi tai suomeksi.

16.1

Explain the mathematical relationship between the following quantities (just the dependence is enough if you don't know the full formula):

- (a) frequency and wave-vector of an optical phonon near Brillouin zone center
- (b) frequency and wave-vector of an acoustic phonon near Brillouin zone center
- (c) magnetic flux through a superconducting loop (depends only on constants!)
- (d) magnetic susceptibility and temperature for paramagnetic atoms or ions
- (e) total current density and band structure $E(\mathbf{k})$ of a solid
- (f) electron density and temperature in a *doped* semiconductor when $k_B T$ is larger than the dopant binding energy but smaller than gap

16.2

Essay: Superconductivity, phenomenology and microscopic foundations.

16.3

- (a) Let's consider the hexagonal 2D Bravais lattice with a lattice constant a . What are its primitive translation vectors, what is the general vector describing all lattice points, what is the area of the primitive unit cell? Make a drawing of the Wigner-Seitz unit cell (lattice point at the origin)
- (b) Derive the reciprocal lattice vectors of the hexagonal 2D lattice, draw the primitive vectors and also draw the first Brillouin zone. What type of lattice is the reciprocal lattice?
- (c) Why is hexagonal 2D lattice important, even when one considers 3D lattices?

16.4

- (a) Derive the density of states $g(E)$ for a *two-dimensional* (2D) free-electron gas. Hint: You could use the fact that the density of states in the 2D k -space is $g(\mathbf{k}) = 2A/(2\pi)^2$ (periodic boundary conditions), where A is the sample area, and that $g(E)dE$ is thus given by the area in k -space of the thin shell between E and $E + dE$ multiplied by $g(\mathbf{k})$. Make sure you understand that $g(\mathbf{k})$ is not the same as $g(k)$, as \mathbf{k} is a 2D vector and k is its length! (b) Calculate the Fermi-energy E_F and the Fermi wave-vector k_F (magnitude) as a function of areal density of electrons $N/A = n$. (c) Draw the Fermi-surface for free 2D electrons in the reciprocal space of a 2D square lattice with valence 2, i.e. two free electrons/atom. Use both the extended zone scheme and the reduced zone scheme (for all Brillouin zones that are occupied), and indicate where the occupied and the empty states are.

16.5

Selitä seuraavien suureiden välinen matemaattinen riippuvuus (tarkka kaava ei ole tarpeen):

- (a) Optisen fononin taajuus ja aaltovektori lähellä Brillouinin vyöhykkeen keskustaa
- (b) Akustisen fononin taajuus ja aaltovektori lähellä Brillouinin vyöhykkeen keskustaa
- (c) magneettivuo suprajohtavan renkaan läpi (riippuu vain vakioista!)
- (d) magneettinen susceptibiliteetti ja lämpötila paramagneettisille ioneille tai atomeille
- (e) virrantiheys ja kiteen vyörakenne $E(\mathbf{k})$
- (f) seostetun (doped) puolijohteen elektronitiheys ja lämpötila kun $k_B T$ on suurempi kuin seosatomien sidosenergia, mutta pienempi kuin puolijohteen energia-aukko

16.6

Essee: Suprajohtavuus, fenomenologia ja mikroskooppinen perusta

16.7

- (a) Tarkastellaan heksagonaalista 2D Bravais-hilaa, jolla on hilavakio a . Mitkä ovat sen primitiiviset siirtovektorit, mikä on yleinen vektori joka kuvaa kaikki hilapisteet ja mikä on yksikkökopin ala? Piirrä Wigner-Seitz yksikkökoppi (hilapiste origossa)
- (b) Laske heksagonaalisen 2D hilan käänteishilavektorit, piirrä primitiivivektorit sekä ensimmäinen Brillouinin vyöhyke. Mikä hilatyypin käänteishila on?
- (c) Miksi heksagonaalinen 2D hila on tärkeä jopa 3D hilojen tapauksessa?

16.8

- (a) Johda 2D vapaan elektronikaasun tilatiheyden $g(E)$ lauseke. Vinkki: voit esim. käyttää tietoa että tilatiheys 2D k -avaruudessa on $g(\mathbf{k}) = 2A/(2\pi)^2$ (periodisilla reunaehdoilla), missä A on näytteen pinta-ala, ja että $g(E)dE$ on siten k -avaruuden ala ohuessa nauhassa $E:n$ ja $E + dE:n$ välillä, kerrottuna $g(\mathbf{k})$:lla. Huomaa että $g(\mathbf{k})$ ei ole sama kuin $g(k)$, sillä \mathbf{k} on 2D vektori, ja k on sen pituus! (b) laske Fermi-energia E_F ja Fermi aaltovektori k_F (vektorin pituus) elektronien pinta-alatiheyden $N/A = n$ funktiona. (c) Piirrä Fermi-pinta 2D vapaille elektroneille 2D neliöhilan käänteisavaruudessa, jos atomien valenssi on 2 (kaksi vapaata elektronia/atomi). Käytä sekä levitettyä (extended) että kavennettua (reduced) Brillouin-vyöhyke kuvaa. Osoita miehitetyt ja tyhjät tilat kaikille Brillouinin vyöhykkeille, joissa on elektroneja.