14 FYSM300 Materials physics I, Materiaalifysiikka I, Midtern 2, Välikoe 2 20.5.2010

Four hours of time, answer all questions. Neljä tuntia aikaa, vastaa kaikkiin kysymyksiin. Kysymykset suomeksi toisella puolella! Kysymyksiin saa vastata englanniksi tai suomeksi.

14.1

Explain briefly:

(a) What is Bloch's theorem? Can you give an equation for a Bloch wave function?
(b) What is exchange interaction and why is it important?
(c) Why and how can a "nearly-free" electron gas be insulating?
(d) What happens to an electron in a periodic solid with applied electric field and no scattering mechanisms?
(e) How does the electron density of an extrinsic (doped) n-type semiconductor vary with temperature? Give the functional dependence in different regimes (dopant binding energy vs. temperature).
(f) What does the temperature dependence of resitivity of a typical metal look like? Explain which scattering mechanisms are dominant in the different regimes.

14.2

Essay: Superconductivity, phenomenology and microscopic foundations.

14.3

The magnetization of a gas of non-interacting paramagnetic atoms or ions (density n) in a magnetic field B can be calculated by

$$M = -\frac{nk_BT^2}{B}\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T}\right), \tag{39}$$

if one knows the partition function

$$Z = \sum_i \exp(-E_i/k_BT), \tag{40}$$

where the Zeeman split energy levels E_i are given by $E = g_J\mu_B J_z B$, with g_J the Lande g-factor, $\mu_B = e\hbar/(2m)$ the Bohr magneton, and $J_z = -J...J$ the z component of the total angular momentum. The result is

$$M = ng_J\mu_B J B_J(x), \tag{41}$$

where $B_J(x)$ is the so called Brillouin function and $x = g_J\mu_B JB/(k_BT)$. Derive the above result, and calculate what is the value of saturation magnetization (in units of μ_B/ion) for Fe^{2+} ions, for which $g_J = 3/2$, $J = 4$.

14.4

(a) Derive the density of states $g(E)$ for a *two-dimensional* (2D) free-electron gas. Hint: You could use the fact that the density of states in the 2D k-space is $g(\mathbf{k}) = 2A/(2\pi)^2$ (periodic boundary conditions), where A is the sample area, and that $g(E)dE$ is thus given by the area in k-space of the thin shell between E and $E + dE$ multiplied by $g(\mathbf{k})$. (b) Calculate the Fermi-energy E_F and the Fermi wave-vector k_F (magnitude) as a function of areal density of electrons $N/A = n$. (c) Draw the Fermi-surface for free 2D electrons in in the reciprocal space of a 2D square lattice with valence 2, i.e. two free electrons/atom. Use both the extended zone scheme and the reduced zone scheme (for all Brillouin zones that are occupied), and indicate where the occupied and the empty states are.

14.5

Selitä lyhyesti:

(a) Mikä on Blochin teoreema? Osaatko antaa yhtälön Blochin aaltofunktiolle? (b) Mikä on vaihtovuorovaikutus (exchange interaction) ja miksi se on tärkeä ?
(c) Miksi ja miten voi ns. "lähes vapaa" elektronikaasu olla eriste?
(d) Mitä tapahtuu elektronille periodisessa hilassa jossa on sähkökenttä, jos sillä ei ole sirontamekansimeja?
(e) Miten (seostetun) n-tyyppisen puolijohteen elektronitiheys riippuu lämpötilasta ? Anna riippuvuus eri alueissa, jotka riippuvat seostusepäpuhtauden sidosenergian ja lämpötilan suhteesta.
(f) Miltä näyttää tyypillinen metallin resistiivisyys lämpötilan funktiona? Selitä mitkä sirontamekansimit dominoivat milläkin lämpötila-alueella.

14.6

Essee: Suprajohtavuus, fenomenologia ja mikroskooppinen perusta

14.7

Vuorovaikuttamattomien paramegneettisten atomien tai ionien (tiheys n) magnetisaation magneettikentässä B voidaan laskea

$$M = -\frac{nk_BT^2}{B}\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T}\right), \tag{42}$$

jos tiedetään partitiofunktio

$$Z = \sum_i \exp(-E_i/k_BT), \tag{43}$$

missä Zeeman eronneet energiatasot E_i ovat $E = g_J\mu_B J_z B$, g_J on Landen g-luku, $\mu_B = e\hbar/(2m)$ on Bohrin magnetoni, ja $J_z = -J...J$ on kokonaiskulmaliikemäärän z-komponentti. Tulokseksi saadaan

$$M = ng_J\mu_B JB_J(x), \tag{44}$$

missä $B_J(x)$ on ns. Brillouinin funktio ja $x = g_J\mu_B JB/(k_BT)$. Johda saatu tulos, ja laske mikä on saturaatiomagnetisaation arvo (yksiköissä /ioni) Fe^{2+} ioneille, joille $g_J = 3/2$, $J = 4$.

14.8

(a) Johda 2D vapaan elektronikaasun tilatiheyden $g(E)$ lauseke. Vinkki: voit esim. käyttää tietoa että tilatiheys 2D k-avaruudessa on $g(\mathbf{k}) = 2A/(2\pi)^2$ (periodisilla reaunaehdoilla), missä A on näytteen pinta-ala, ja että $g(E)dE$ on siten k-avaruuden ala ohuessa nauhassa E:n ja $E+dE$n välillä, kerrottuna $g(\mathbf{k})$:lla. (b) laske Fermi-energia E_F ja Fermi aaltovektori k_F (vektorin pituus) elektronien pinta-alatiheyden $N/A = n$ funktiona. (c) Piirrä Fermi-pinta 2D vapaille elektroneille 2D neliöhilan käänteisavaruudessa, jos atomien valenssi on 2 (kaksi vapaata elektronia/atomi). Käytä sekä levitettyä (extended) että kavennettua (reduced) Brillouin-vyöhyke kuvaa. Osoita miehitetyt ja tyhjät tilat kaikille Brillouinin vyöhykkeille, joissa on elektroneja.