FYSP111, Tentti **20.4.2012**

1. Laske funktion $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{2x^2+x-3}$ raja-arvot kun

   a) $x \to \infty$

   b) $x \to 1$

   c) $x \to -\frac{3}{2}$

   mikäli ne ovat olemassa

2. a) Olkoon $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$. Laske $f'(0)$.

   b) Osoita, että funktio $f(x) = x^2 \ln x$ toteuttaa differentiaaliyhtälön
   $2x^2 f''(x) - xf'(x) - 2f(x) - 5x^2 = 0$.

   c) Muodosta funktion $f(x) = \dfrac{1}{\cosh(2x)}$ toisen asteen Taylorin polynomi $T_2(x)$ pisteessä $x_0 = 0$ ja laske sitä käyttäen likiarvo luvulle $f(\frac{1}{4})$.

3. a) Selitä lyhyesti, mitä tarkoittaa osittaisintegrointi.

   b) Laske epäoleellinen integraali $\displaystyle\int_0^\infty x^2 e^{-x} dx$.

   c) Laske integraali $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$ käyttämällä sijoitusta $y = \tan x$ sekä oheista integraalitaulukkoa.
   (Vihje: trigonometrinen identiteetti, $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$)

4. Ratkaise alkuarvotehtävä $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y^2 x}{\sqrt{1+x^2}}; \quad y(0) = 1.$

Käännä.

FYSP111 Tentti 20.4.2012. Liite 1. Ote integraalitalukosta.

INTEGRALS INVOLVING $\sqrt{x^2+a^2}$

14.182 $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) \quad \text{or} \quad \sinh^{-1}\frac{x}{a}$$

14.183 $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2}$$

14.184 $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$$

14.185 $$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{3} - a^2\sqrt{x^2+a^2}$$

14.186 $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$$

14.187 $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}$$

14.188 $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$$

14.189 $$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$$

14.190 $$\int x\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{3}$$

14.191 $$\int x^2\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x(x^2+a^2)^{3/2}}{4} - \frac{a^2x\sqrt{x^2+a^2}}{8} - \frac{a^4}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$$

14.192 $$\int x^3\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{(x^2+a^2)^{5/2}}{5} - \frac{a^2(x^2+a^2)^{3/2}}{3}$$

14.193 $$\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2+a^2} - a\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$$

14.194 $$\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} + \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$$

14.195 $$\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^3}\,dx = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{2x^2} - \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$$

14.196 $$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$$

14.197 $$\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

14.198 $$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$$

14.199 $$\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

14.200 $$\int \frac{dx}{x(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{1}{a^3}\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$$

14.201 $$\int \frac{dx}{x^2(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^4x} - \frac{x}{a^4\sqrt{x^2+a^2}}$$

14.202 $$\int \frac{dx}{x^3(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{-1}{2a^2x^2\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{3}{2a^4\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{3}{2a^5}\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$$