FYSP111, Tentti **13.12.2013**

HUOM: Tehtävissä 4 b) ja 5 voit tarvittaessa käyttää tehtäväpaperin kääntöpuolella olevaa integraalitaulukkoa.

1. Laske raja-arvot

   a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x + 2\cos x}{x^2+2}$.

   b) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+x-2}{2x^2+x-3}$.

   c) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\sqrt{x})}$

2. a) Olkoon $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$. Laske $f'(0)$.

   b) Osoita, että funktio $f(x) = xe^{-x^2}$ toteuttaa differentiaaliyhtälön $f''(x) + 2xf'(x) + 4f(x) = 0$.

3. Muodosta funktion $f(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$ toisen asteen Taylorin polynomi $T_2(x)$ pisteen $x_0 = 1$ ympäristössä.

4. a) Laske määräämätön integraali $\int x^2 e^{-x} dx$.

   b) Laske integraali $\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos x}$ käyttämällä sijoitusta $y = \tan x$.

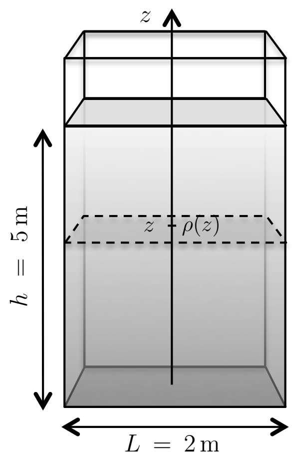
   Vihje: voit käyttää trigonometrista identiteettiä $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$.

5. Ratkaise alkuarvotehtävä $\frac{dy}{dx} = y^2 \ln x; \quad y(1) = 1$.

6. Oheisen kuvan mukainen poikkileikkaukseltaan neliön muotoinen varastosäiliö, jonka sivun pituus $L = 2\,\mathrm{m}$, on täytetty jauhemaisella materiaalilla. Täytön jälkeen jauhe on vajonnut oman painonsa vaikutuksesta alaspäin siten, että sen pinta on korkeudella $h = 5\,\mathrm{m}$ säiliön pohjasta. Jauhe on lisäksi tiivistyneenä pohjaa kohti siten, että sen massatiheys korkeudella z säiliön pohjasta noudattaa kaavaa

$$\rho(z) = \rho_0 e^{-\frac{z}{\lambda}}; \quad 0 \le z \le h,$$

missä $\rho_0 = 1200\ \mathrm{kg/m^3}$ ja $\lambda = 10.0\,\mathrm{m}$ ovat vakioita. Laske säiliön sisältämän jauheen kokonaismassa.



Käännä.

INTEGRALS INVOLVING $\sqrt{x^2 \pm a^2}$ $(a > 0)$

(If $\sqrt{x^2 - a^2}$, assume $x > a > 0$.)

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2 + a^2} - a\ln\left|\frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x}\right| + C$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2 - a^2} - a\tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} + C$$

$$\int x^2\sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2 \pm a^2)\sqrt{x^2 \pm a^2} - \frac{a^4}{8}\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \mp \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x} + \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \mp\frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{a^2 x} + C$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 \pm a^2)^{3/2}} = \frac{\pm x}{a^2\sqrt{x^2 \pm a^2}} + C$$

$$\int (x^2 \pm a^2)^{3/2}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2 \pm 5a^2)\sqrt{x^2 \pm a^2} + \frac{3a^4}{8}\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

INTEGRALS INVOLVING $\sqrt{a^2 - x^2}$ $(a > 0, |x| < a)$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2 - x^2} - a\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right| + C$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + C$$

$$\int x^2\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2 - a^2)\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^4}{8}\sin^{-1}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 x} + C$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \sin^{-1}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2 - x^2}} + C$$

$$\int (a^2 - x^2)^{3/2}\,dx = \frac{x}{8}(5a^2 - 2x^2)\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{3a^4}{8}\sin^{-1}\frac{x}{a} + C$$

INTEGRALS OF INVERSE TRIGONOMETRIC FUNCTIONS

$$\int \sin^{-1}x\,dx = x\sin^{-1}x + \sqrt{1 - x^2} + C$$

$$\int \tan^{-1}x\,dx = x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C$$

$$\int \sec^{-1}x\,dx = x\sec^{-1}x - \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}| + C \quad (x > 1)$$

$$\int x\sin^{-1}x\,dx = \frac{1}{4}(2x^2 - 1)\sin^{-1}x + \frac{x}{4}\sqrt{1 - x^2} + C$$

$$\int x\tan^{-1}x\,dx = \frac{1}{2}(x^2 + 1)\tan^{-1}x - \frac{x}{2} + C$$

$$\int x\sec^{-1}x\,dx = \frac{x^2}{2}\sec^{-1}x - \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 1} + C \quad (x > 1)$$

$$\int x^n\sin^{-1}x\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\sin^{-1}x - \frac{1}{n+1}\int \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx + C \text{ if } n \neq -1$$

$$\int x^n\tan^{-1}x\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\tan^{-1}x - \frac{1}{n+1}\int \frac{x^{n+1}}{1 + x^2}\,dx + C \text{ if } n \neq -1$$

$$\int x^n\sec^{-1}x\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\sec^{-1}x - \frac{1}{n+1}\int \frac{x^n}{\sqrt{x^2 - 1}}\,dx + C \quad (n \neq -1,\ x >$$

EXPONENTIAL AND LOGARITHMIC INTEGRALS

$$\int xe^x\,dx = \ldots$$

$$\int x^n e^x\,dx = \ldots$$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$$

$$\int x^n\ln x\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C, \quad (n \neq -1)$$

$$\int x^n(\ln x)^m\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln x)^m - \frac{m}{n+1}\int x^n(\ln x)^{m-1}\,dx \quad (n \neq -1)$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C$$

INTEGRALS OF HYPERBOLIC FUNCTIONS

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$$

$$\int \tanh x\,dx = \ln(\cosh x) + C$$

$$\int \coth x\,dx = \ln|\sinh x| + C$$

$$\int \operatorname{sech} x\,dx = 2\tan^{-1}(e^x) + C$$

$$\int \operatorname{csch} x\,dx = \ln\left|\tanh\frac{x}{2}\right| + C$$

$$\int \sinh^2 x\,dx = \frac{1}{4}\sinh 2x - \frac{x}{2} + C$$

$$\int \cosh^2 x\,dx = \frac{1}{4}\sinh 2x + \frac{x}{2} + C$$

$$\int \tanh^2 x\,dx = x - \tanh x + C$$

$$\int \coth^2 x\,dx = x - \coth x + C$$

$$\int \operatorname{sech}^2 x\,dx = \tanh x + C$$

$$\int \operatorname{csch}^2 x\,dx = -\coth x + C$$

$$\int \operatorname{sech} x\tanh x\,dx = -\operatorname{sech} x + C$$

$$\int \operatorname{csch} x\coth x\,dx = -\operatorname{csch} x + C$$