

HUOM: Tehtävissä 4 b) ja 6 voit käyttää kääntöpuolella annettua integraalitaulukkoa.

1. Laske seuraavat raja-arvot

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x \sin x}$

2. a) Laske funktion $f(x) = (x - 2)\sqrt{x + 1}$ derivaattafunktio.

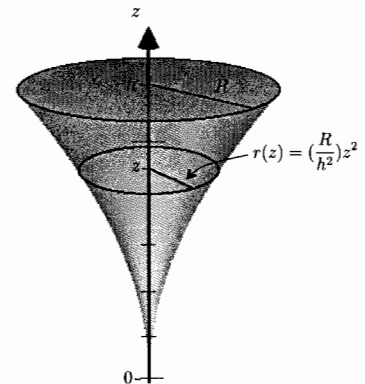
b) Olkoon $f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)$. Laske $f'(1)$.

3. Muodosta funktion $f(x) = e^{\sin(x)}$ toisen asteen Taylorin polynomi pisteessä $x_0 = 0$ ja laske sitä käyttäen likiarvo luvulle $f(x) = e^{\sin(0.2)}$.

4. a) Laske määräämätön integraali $\int x^2 e^x dx$ käyttämällä osittaisintegrointia.

b) Laske määrätty integraali $\int_0^1 \frac{1 + x^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx$ käyttämällä sijoitusta $x = \sin u$.

5. Laske oheisen kuvan mukaisen pyörähdyssymmetrisen suppilokartion tilavuus. Suppilon vaakasuora poikkileikkaus on ympyrä, jonka säde noudattaa kaavaa $r(z) = az^2$, missä z on etäisyys suppilon kärjestä, $a = \frac{R}{h^2}$, R on yläpinnan säde ja h on suppilon korkeus.



6. Ratkaise alkuarvot tehtävä

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + 1}} = 0;$$

$$y(0) = 1.$$

FYSP111. Liite 1: Integraalitalukko

INTEGRALS INVOLVING $\sqrt{x^2 \pm a^2}$ ($a > 0$)

(If $\sqrt{x^2 - a^2}$, assume $x > a > 0$.)

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx &= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} &= \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \\ \int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x} dx &= \sqrt{x^2 + a^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} \right| + C \\ \int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx &= \sqrt{x^2 - a^2} - a \tan^{-1} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} + C \\ \int x^2 \sqrt{x^2 \pm a^2} dx &= \frac{x}{8} (2x^2 \pm a^2) \sqrt{x^2 \pm a^2} - \frac{a^4}{8} \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \\ \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx &= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \mp \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \\ \int \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x^2} dx &= -\frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x} + \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \\ \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 \pm a^2}} &= \mp \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{a^2 x} + C \\ \int \frac{dx}{(x^2 \pm a^2)^{3/2}} &= \frac{\pm x}{a^2 \sqrt{x^2 \pm a^2}} + C \\ \int (x^2 \pm a^2)^{3/2} dx &= \frac{x}{8} (2x^2 \pm 5a^2) \sqrt{x^2 \pm a^2} + \frac{3a^4}{8} \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C\end{aligned}$$

INTEGRALS INVOLVING $\sqrt{a^2 - x^2}$ ($a > 0, |x| < a$)

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} + C \\ \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx &= \sqrt{a^2 - x^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right| + C \\ \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx &= -\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} + C \\ \int x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \frac{x}{8} (2x^2 - a^2) \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^4}{8} \sin^{-1} \frac{x}{a} + C \\ \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a^2 - x^2}} &= -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 x} + C \\ \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} dx &= -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \sin^{-1} \frac{x}{a} + C \\ \int \frac{dx}{x \sqrt{a^2 - x^2}} &= -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right| + C \\ \int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{3/2}} &= \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 - x^2}} + C \\ \int (a^2 - x^2)^{3/2} dx &= \frac{x}{8} (5a^2 - 2x^2) \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{3a^4}{8} \sin^{-1} \frac{x}{a} + C\end{aligned}$$

TRIGONOMETRIC INTEGRALS

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x dx &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C \\ \int \cos^2 x dx &= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C \\ \int \tan^2 x dx &= \tan x - x + C \\ \int \cot^2 x dx &= -\cot x - x + C \\ \int \sec^2 x dx &= \tan x + C \\ \int \sec^3 x dx &= \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| + C \\ \int \csc^3 x dx &= -\frac{1}{2} \csc x \cot x + \frac{1}{2} \ln |\csc x - \cot x| + C \\ \int \sin ax \sin bx dx &= \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + C \text{ if } a^2 \neq b^2 \\ \int \cos ax \cos bx dx &= \frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} + C \text{ if } a^2 \neq b^2 \\ \int \sin ax \cos bx dx &= -\frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} + C \text{ if } a^2 \neq b^2 \\ \int \sin^n x dx &= -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx \\ \int \cos^n x dx &= \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx \\ \int \tan^n x dx &= \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x dx \text{ if } n \neq 1 \\ \int \cot^n x dx &= \frac{-1}{n-1} \cot^{n-1} x - \int \cot^{n-2} x dx \text{ if } n \neq 1 \\ \int \sec^n x dx &= \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} x \tan x + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x dx \text{ if } n \neq 1 \\ \int \csc^n x dx &= \frac{-1}{n-1} \csc^{n-2} x \cot x + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} x dx \text{ if } n \neq 1 \\ \int \sin^n x \cos^m x dx &= -\frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{n+m} + \frac{n-1}{n+m} \int \sin^{n-2} x \cos^m x dx \text{ if } n \neq -m \\ \int \sin^n x \cos^m x dx &= \frac{\sin^{n+1} x \cos^{m-1} x}{n+m} + \frac{m-1}{n+m} \int \sin^n x \cos^{m-2} x dx \text{ if } m \neq -n \\ \int x \sin x dx &= \sin x - x \cos x + C \\ \int x \cos x dx &= \cos x + x \sin x + C \\ \int x^n \sin x dx &= -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x dx \\ \int x^n \cos x dx &= x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x dx\end{aligned}$$