Muista kokeeseen vastatessasi:

- Merkitse nimesi jokaiseen käyttämääsi vastauspaperiin. *Älä* kuitenkaan kirjoita paperiin henkilötunnustasi, vaikka sellainen lokero paperista löytyykin.
- Perustele vastauksesi huolellisesti. Vastaus ilman perusteluja on arvoton.
- Tarkista saamasi vastaukset, jos se on suinkin mahdollista.

Kokeessa ei saa käyttää laskinta! Aikaa on käytettävissä neljä tuntia.

1. **a)** Olkoon f pariton ja g parillinen funktio. Osoita, että fg on pariton funktio. *[4 p]*

b) Kuvaile muutamalla lauseella, mikä Bernoullin–l'Hôpitalin sääntö raja-arvojen laskemiseen on, ja missä tapauksissa sitä voi käyttää. *[4 p]*

c) Johda käänteisfunktion derivointikaava ketjusäännöstä. *[4 p]*

2. Olkoon

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x}.$$

a) Etsi funktion f nollakohdat. *[2 p]*

b) Laske $f'(x)$ ja $f''(x)$. *[4 p]*

c) Muodosta funktion f toisen kertaluvun Taylorin polynomi pisteen $x = \frac{1}{2}$ ympärillä. *[6 p]*

3. Laske seuraavat määrätyt integraalit: *[kustakin 3 p]*

a) $\displaystyle\int_0^1 x \ln x \,\mathrm{d}x$ **b)** $\displaystyle\int_{-2}^{2} (t^2-2t+1)^{-1}\,\mathrm{d}t$ **c)** $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{-x}\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-1}}\,\mathrm{d}x$ **d)** $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \cos x \,\mathrm{d}x$

4. Funktiosta $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiedetään seuraavaa:

i) Se on parillinen funktio.

ii) Se on jatkuva mutta ei derivoituva pisteessä $x = 0$.

iii) Sen pienin arvo (eli globaali minimi) on 1.

iv) $f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$ kaikille $x > 0$.

Selvitä mikä funktio on kyseessä ja tarkista, että se toteuttaa ominaisuudet *i)–iv)*. *[12 p]*

★ **Jokeritehtävä.** Laske määrätyn integraalin

$$\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x$$

arvo niin tarkasti kuin osaat. *[+4 p]*

Tästä tehtävästä on mahdollista saada 4 lisäpistettä. Näitä pisteitä ei lasketa kokeen maksimipistemäärään, joka on 4 · 12 = 48 pistettä.

Joitain hyödyllisiä kaavoja toisella puolella

Perusfunktioita

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$$
$$a^b = \exp(b \ln a) \quad (a > 0)$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$
$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$
$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$
$$\cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$
$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\sinh x = \tfrac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$$
$$\cosh x = \tfrac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Osamurtokehitelmä

Olkoon meillä rationaalifunktio $P(x)/Q(x)$ missä $\deg P < \deg Q$.

- Jos $Q(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)\ldots(x - \lambda_m)$ ja kaikki nollakohdat ovat 1. kertalukua, niin on olemassa luvut $c_1, \ldots, c_m$ siten, että

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{c_1}{x - \lambda_1} + \frac{c_2}{x - \lambda_2} + \cdots + \frac{c_m}{x - \lambda_m}.$$

- Jos Q:lla on p:nnen kertaluvun juuri λ, tulee sen tilalle yo. kehitelmässä

$$\frac{d_1}{x - \lambda} + \frac{d_2}{(x - \lambda)^2} + \cdots + \frac{d_p}{(x - \lambda)^p}.$$

- Jos Q:n tekijöihinjaossa jää jäljelle toisen asteen polynomeja $R_1, \ldots, R_k$, lisätään kehitelmään vielä termit

$$\frac{a_1 x + b_1}{R_1(x)} + \frac{a_2 x + b_2}{R_2(x)} + \cdots + \frac{a_k x + b_k}{R_k(x)}.$$

Erikoisfunktioita

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

Derivointi

$f(x)$	$f'(x)$	
x^a	$a x^{a-1}$	$(a \neq 0)$
e^x	e^x	
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	
$\sin^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\cos^{-1} x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\tan^{-1} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	
$\sinh x$	$\cosh x$	
$\cosh x$	$\sinh x$	
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	
$\sinh^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	
$\cosh^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	
$\tanh^{-1} x$	$\frac{1}{1-x^2}$	

Integrointi

ks. *Derivointi*.

Derivaatan sovelluksia

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k$$
$$f(x) = P_n(x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(s)(x - a)^{n+1}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$$
$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots$$
$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots$$
$$\ln(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots \quad (x \in]-1, 1])$$
$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \cdots \quad (|x| < 1)$$