Muista kokeeseen vastatessasi:

- Merkitse nimesi jokaiseen käyttämääsi vastauspaperiin. *Älä* kuitenkaan kirjoita paperiin henkilötunnustasi, vaikka sellainen lokero paperista löytyykin. Pelkkä syntymäaika riittää.
- Lue tehtävänanto huolellisesti ennen vastaamista.
- Perustele vastauksesi huolellisesti. Vastaus ilman perusteluja on arvoton.
- Tarkista saamasi vastaukset, jos se on suinkin mahdollista.
- Aikaa kokeen suorittamiseen on käytettävissä neljä tuntia.
- **Kokeessa ei saa käyttää laskinta.**

1. **a)** Johda osamäärän derivointikaava

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

käyttämällä tulon derivointikaavaa ja ketjusääntöä. *[6 p]*

b) Olkoon $f : [0,1] \to [0,1]$ derivoituva funktio. Kuvaile muutamalla lauseella, miten selvittäisit tällaisen funktion suurimman arvon, ja miten perustelisit, että tällainen suurin arvo on ylipäänsä olemassa. *[6 p]*

2. **a)** Laske $f''(x)$ kun $f(x) = \tan x$. *[3 p]*

b) Määritä seuraava raja-arvo, mikäli se on olemassa: *[4 p]*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} - \frac{\cos x}{x^2}$$

c) Etsi toisen kertaluvun Taylorin polynomin avulla hyvä likiarvo luvulle $\tan 3$. *[5 p]*

3. Laske seuraavat määrätyt integraalit: *[kustakin 3 p]*

a) $\displaystyle\int_0^8 \frac{1}{\sqrt{u+1}}\,\mathrm{d}u$ **b)** $\displaystyle\int_{-1}^1 t^{-3}\,\mathrm{d}t$ **c)** $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{e}^z}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2z}}}\,\mathrm{d}z$ **d)** $\displaystyle\int_0^1 (x\ln x)^2\,\mathrm{d}x$

4. Carl Friedrich Gauss oli melkoinen epeli. Tarinoiden mukaan hän osasi laskea ennen kuin hän osasi lukea, ja ensimmäiset mullistavat löytönsä matematiikan alalla hän teki jo teini-ikäisenä. Eräs hänen mukaansa nimetyistä lukuisista matematiikan menetelmistä on *Gaussin kvadratuuri*, jota voidaan käyttää määrättyjen integraalien arvioimiseen.

Yleisen Gaussin kvadratuurin idea on melko ovela. Funktion määrätty integraali yli välin $[-1,1]$ esitetään painotettuna summana funktion arvoista, eli

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(t_i), \tag{1}$$

missä n on arviointipisteiden lukumäärä, pisteet $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ ovat arviointipisteet (jokainen välillä $[-1,1]$) ja kertoimet $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ ovat funktion arvoihin liitetyt painokertoimet. Alunperin tuntemattomat t_i:t ja w_i:t kiinnitetään vaatimalla, että arvio (1) antaa täsmälleen oikeita tuloksia tapauksissa, joissa f on korkeintaan astetta $2n-1$ oleva polynomi. Kun tuntemattomat on valittu näin, toimii arvio (1) hyvin kaikille funktioille, jotka ovat likimain polynomeja – eli kunhan n on tarpeeksi korkea, kaikille siisteille funktioille.

Nyt voit kääntää sivua

Yksinkertaisin versio Gaussin kvadratuurista on versio $n = 2$. Yleisistä Gaussin kvadratuurin ominaisuuksista seuraa, että tällöin $w_1 = w_2$ ja $t_1 = -t_2$. Gaussin kvadratuurin antama arvio on siis tällöin

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx wf(-t) + wf(t), \tag{2}$$

missä w ja t ovat vakioita.

a) Määritä vakiot w ja t ehdosta, että arvio (2) antaa tarkkoja tuloksia kaikille korkeintaan kolmannen asteen polynomeille. Näin saat kätevän tavan arvioida siistien funktioiden määrättyjä integraaleja laskemalla funktion arvot vain kahdessa pisteessä! *[6 p]*

b) Kuten varmaankin muistat,

$$\ln n = \int_{1}^{n} \ln x = \int_{1}^{n} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Etsi likiarvo luvulle $\ln 3$ käyttämällä edellisessä kohdassa johtamaasi Gaussin kvadratuurikaavaa. Huomaa, että tätä varten yllä olevaa integrointiväliä täytyy hieman hienosäätää. Arvioi myös, onko saamasi tulos järkevä. *[6 p]*

★ **Jokeritehtävä.** Laske haluamallasi menetelmällä $f^{(2013)}(0)$, eli siis funktion f kahdestuhanneskolmastoista derivaatta pisteessä 0, kun $f(x) = \mathrm{e}^{x^3}$.

Tästä tehtävästä on mahdollista saada 4 lisäpistettä. Näitä pisteitä ei lasketa kokeen maksimipistemäärään, joka on $4 \cdot 12 = 48$ pistettä.

Nyt voit kääntää sivua