

JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
FYSIIKAN LAITOS

FYSP111 M1: Derivointi ja integrointi

Tentti 25. maaliskuuta 2011.

Kokeessa saa olla mukana laskin ja lunttilappu, mutta ei taulukkokirjaa.

Ratkaise neljä (4) tehtävää.

1. Ratkaise yhtälöt:

(a) $2 \sinh x - \cosh x = 1$

(b) $2 \sin^2 x = \sin 2x.$

2. (a) Määrä raja-arvo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1 - x^2}}{x^4}.$$

(b) Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$x y' = 1 - y^2$$

alkuehdolla $y(1) = 0$ ja alkuehdolla $y(1) = 1.$

3. Määrä integraalifunktiot:

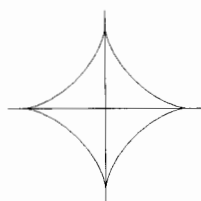
(a) $\int \sin \sqrt{x} dx,$

(b) $\int \frac{2x+1}{x^4-1} dx.$

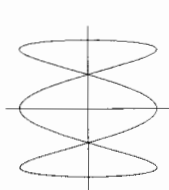
4. Käyrän Γ_1 yhtälö on $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$, käyrän Γ_2 parametriesitys on

$$\begin{cases} x = \cos 3t \\ y = \sin t, \quad t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

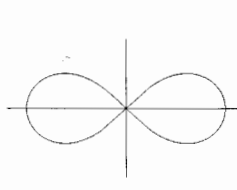
ja käyrän Γ_3 yhtälö napakoordinaateissa on $r = \sqrt{\cos(2\varphi)}.$



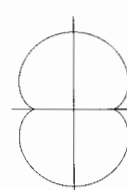
(a)



(b)



(c)



(d)

(a) Mikä oheisista kuvista esittää käyrää Γ_1 , Γ_2 ja Γ_3 ?

(b) Määrä käyrän Γ_2 pisteeseen $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ piirretyn tangentin yhtälö.

(c) Laske käyrän Γ_3 rajoittaman tason osan pinta-ala.

5. Laske integraalille

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$$

likiarvo approksimoimalla integroitavaa funktiota sen toisen asteen Taylorin polynomilla origossa. Arvioi tuloksen tarkkuutta.

Hyödyllisiä ja hyödyttömiä kaavoja

HYPERBOLISET FUNKTIOT

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

TRIGONOMETRISIA KAAVOJA

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

SARJAKEHITELMIÄ

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}, \quad -1 < x \leq 1$$

$$(1+x)^\mu = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(\mu-1) \cdots (\mu-k+1)}{k!} x^k, \quad |x| < 1$$

INTEGROINTIKAAVOJA

$$\int x^\mu dx = \frac{1}{\mu+1} x^{\mu+1} + C, \quad \mu \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log |x| + C$$

$$\int f(x)^\mu f'(x) dx = \frac{1}{\mu+1} f(x)^{\mu+1} + C, \quad \mu \neq -1$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$