

1. Määritä seuraavat raja-arvot mikäli ne ovat olemassa.. (Perustele tuloksesi joko riittävällä määrällä välivaiheita tai sanallisesti.)

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-5}{5x+3} \right),$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right),$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{x^2-2x+1} \right),$

2. a) Olkoon funktio f määritelty kaavalla $f(x) = x^3 - x$ kun $x \geq -1$. Määritä funktion ääriarvopisteet sekä vastaavien ääriarvojen tyyppi (maksimi/minimi, lokaali/globaali). Piirrä funktion kuvaaja ja merkitse siihen ko. ääriarvokohdat.
- b) Muodosta funktion $f(x) = \sin(x)$ lineaarinen approksimaatio pisteen $x_0 = 0$ ympäristössä. Kuinka suuri on approksimaation virhe pisteessä $x = \pi/2$.

3. a) Laske (epäoleellinen) integraali $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ sijoituksella $x = \sin u$.

b) Laske integraali $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x dx$ käyttäen osittaisintegrointia

4. Laskuvarjohyppääjä, jonka massa on m lähtee hyppyynsä maahan nähden paikallaan olevasta kuumailmapallosta. Ennen laskuvarjon avaamista vallitsevan vapaan putoamisen aikana häneen vaikuttaa maan vetovoima mg alaspäin sekä putoamisnopeuden v neliöön verrannollinen ilman vastus Cv^2 , jonka suunta on vastakkainen liikkeen suuntaan nähden.

- a) Kirjoita hyppääjän liikeyhtälö vapaan pudotuksen aikana. Piirrä tilanteesta kuva, johon merkitset selkeästi kaikki laskuissa tarvittavat suureet.
- b) Ratkaise hyppääjän putoamisnopeus v ajan t funktiona.
- c) Mikä on hyppääjän rajanopeus (nopeuden raja-arvo kun $t \rightarrow \infty$) kun $m = 80 \text{ kg}$, $C = 0.25 \text{ N s}^2 / \text{m}^2$ ja $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Opastus: Voit hyödyntää tehtäväpaperin kääntöpuolella annettuja integraalitaulukoita.
Vihje: Kannattaa valita voimien ja nopeuden positiivinen suunta alaspäin.

TABLES OF SPECIAL INDEFINITE INTEGRALS

77

$$17.7.9. \int \frac{x dx}{(x^2 - a^2)^2} = \frac{-1}{2(x^2 - a^2)}$$

$$17.7.10. \int \frac{x^2 dx}{(x^2 - a^2)^2} = \frac{-x}{2(x^2 - a^2)} + \frac{1}{4a} \ln \left(\frac{x-a}{x+a} \right)$$

$$17.7.11. \int \frac{x^3 dx}{(x^2 - a^2)^2} = \frac{-a^2}{2(x^2 - a^2)} + \frac{1}{2} \ln(x^2 - a^2)$$

$$17.7.12. \int \frac{dx}{x(x^2 - a^2)^2} = \frac{-1}{2a^2(x^2 - a^2)} + \frac{1}{2a^4} \ln \left(\frac{x^2}{x^2 - a^2} \right)$$

$$17.7.13. \int \frac{dx}{x^2(x^2 - a^2)^2} = -\frac{1}{a^4 x} - \frac{x}{2a^4(x^2 - a^2)} - \frac{3}{4a^6} \ln \left(\frac{x-a}{x+a} \right)$$

$$17.7.14. \int \frac{dx}{x^3(x^2 - a^2)^2} = -\frac{1}{2a^4 x^2} - \frac{1}{2a^4(x^2 - a^2)} + \frac{1}{a^6} \ln \left(\frac{x^2}{x^2 - a^2} \right)$$

$$17.7.15. \int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^n} = \frac{-x}{2(n-1)a^2(x^2 - a^2)^{n-1}} - \frac{2n-3}{(2n-2)a^2} \int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^{n-1}}$$

$$17.7.16. \int \frac{x dx}{(x^2 - a^2)^n} = \frac{-1}{2(n-1)(x^2 - a^2)^{n-1}}$$

$$17.7.17. \int \frac{dx}{x(x^2 - a^2)^n} = \frac{-1}{2(n-1)a^2(x^2 - a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{x(x^2 - a^2)^{n-1}}$$

$$17.7.18. \int \frac{x^m dx}{(x^2 - a^2)^n} = \int \frac{x^{m-2} dx}{(x^2 - a^2)^{n-1}} + a^2 \int \frac{x^{m-2} dx}{(x^2 - a^2)^n}$$

$$17.7.19. \int \frac{dx}{x^m(x^2 - a^2)^n} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{x^{m-2}(x^2 - a^2)^n} - \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{x^m(x^2 - a^2)^{n-1}}$$

(8) Integrals Involving $x^2 - a^2$, $x^2 < a^2$

$$17.8.1. \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{a+x}{a-x} \right) \quad \text{or} \quad \frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{x}{a}$$

$$17.8.2. \int \frac{x dx}{a^2 - x^2} = -\frac{1}{2} \ln(a^2 - x^2)$$

$$17.8.3. \int \frac{x^2 dx}{a^2 - x^2} = -x + \frac{a}{2} \ln \left(\frac{a+x}{a-x} \right)$$

$$17.8.4. \int \frac{x^3 dx}{a^2 - x^2} = -\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2} \ln(a^2 - x^2)$$

$$17.8.5. \int \frac{dx}{x(a^2 - x^2)} = \frac{1}{2a^2} \ln \left(\frac{x^2}{a^2 - x^2} \right)$$

$$17.8.6. \int \frac{dx}{x^2(a^2 - x^2)} = -\frac{1}{a^2 x} + \frac{1}{2a^3} \ln \left(\frac{a+x}{a-x} \right)$$