FYSP112: Vektorit ja kompleksiluvut **Loppukoe 17.12.2010**

1. Hiukkasen paikka ajan t funktiona karteesisten koordinaattien avulla lausuttuna on

$$\begin{cases} x = x(t) = R\sin(\omega t) \\ y = y(t) = R\cos(\omega t) \\ z = z_0 \end{cases}$$

missä R, ω ja z_0 ovat vakioita.

a) Laske hiukkasen nopeusvektori $\vec{v}$.

b) Osoita, että $\vec{r} \perp \vec{v}$, missä $\vec{r}$ on hiukkasen paikkavektori.

c) Osoita, että $\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$, missä $\vec{\Omega} = -\omega\hat{k}$.

2. a) Sievennä lauseke $(4-3i)(3+2i)i$ muotoon $x+iy$.

b) Laske kompleksiluvun $1-i$ kompleksikonjugaatin itseisarvo ja argumentti.

c) Laske $\ln(-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}})$.

3. Lämpötila xy -tasolla noudattaa yhtälöä $T = T_0 + C(x+y)$ missä $T_0 = 100\,^0\mathrm{C}$ ja $C = 20\ ^0\mathrm{C/m}$. Määritä Lagrangen määräämättömien kertoimien menetelmää käyttäen maksimi- ja minimilämpötilat ellipsillä $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{3a^2}=1$, missä $a = 2\,\mathrm{m}$.

4. Olkoon xy -tasolla (pois lukien origo) määritelty funktio $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$.

a) Laske funktion gradientti $\vec{\nabla} f(x,y)$ (kart. koordinaatistossa)

b) Laske funktion $f(x,y)$ derivaatta suuntaan $\vec{u} = \hat{i} + \hat{j}$.

c) Ilmaise a) ja b) -kohtien tulokset käyttäen tason napakoordinaatteja r,θ ja yksikkökantavektoreita $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta$.