FYSP112, Tentti **19.12.2013**

1. Määritellään $\mathbb{R}^3$:n vektorit $\vec{A} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}$, $\vec{B} = \hat{\imath} - \hat{k}$ ja $\vec{C} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$.
   a) Laske $\vec{A} + \vec{B} - \vec{C}$.
   b) Laske $|\vec{A} \times \vec{B}|$.
   c) Laske $\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C}$.

2. Kappaleen paikkavektori ajanhetkellä t on

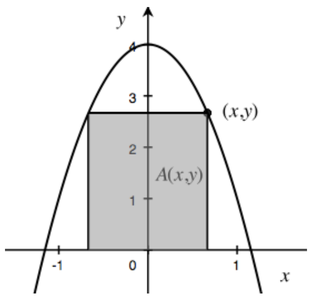
$$\vec{r}\,(t) = R\cos(\omega t)\hat{\imath} + R\sin(\omega t)\hat{\jmath} - \frac{1}{2}gt^2\hat{k}$$

   missä R, ω ja g ovat vakioita. Laske kappaleen nopeus ja kiihtyvyys ajan funktiona.

3. Määritellään funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ s.e. $f(x, y) = y \ln x + xy^2$.
   a) Laske osittaisderivaatat $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ ja $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$.
   b) Mihin suuntaan funktion f arvot kasvavat nopeimmin pisteessä $(1, 2)$?
   c) Laske funktion f suunnattu derivaatta pisteessä $(1, 2)$ pisteen $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ suuntaan (pisteestä $(1, 2)$ katsottuna).

4. Määritellään funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ s.e. $f(x, y) = e^x \cos(x + y)$.
   a) Määritä kuvaajapinnan $z = f(x, y)$ tangenttitason yhtälö pisteessä $(0, \dfrac{\pi}{4})$.
   b) Laske a) -kohdassa saamasi tuloksen avulla funktion likiarvo pisteessä $(0.2, \dfrac{\pi}{4} - 0.1)$.

5. Laske Lagrangen määräämättömien kertoimien menetelmää käyttäen maksimaalinen pinta-ala sellaiselle suorakulmiolle, jonka sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset ja joka sopii kokonaan x -akselin ja paraabelin $y = -3x^2 + 4$ rajoittamaan alueeseen (ks. oheinen kuva).



6. a) Laske kompleksiluvut $i(4 - 3i)(1 + 2i)$ ja $\dfrac{4 - 3i}{1 + 2i}$ (ts. esitä ne muodossa $x + yi$).
   b) Esitä kompleksiluku $z = 1 + \sqrt{3}i$ polaarimuodossa $re^{i\theta}$.
   c) Olkoon $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + i)$. Laske e^z ja $\ln(z)$ (logaritmin päähaara).

HUOM 1: Kaikissa tehtävissä on esitettävä laskujen välivaiheita niin, että laskun suoritusperiaate ilmenee.
HUOM 2: LUE TEHTÄVÄT HUOLELLISESTI!