FYSP112: Vektorit ja kompleksiluvut **Tentti 21.1.2011**

1. Liikkuvan hiukkasen paikkavektori karteesisessa koordinaatistossa lausuttuna on
   $\vec{r} = \vec{r}(t) = R\cos(\omega t)\hat{i} + R\sin(\omega t)\hat{j} + Ct\hat{k}$, missä t on aika ja R, ω ja C ovat vakioita.
   a) Laske hiukkasen nopeusvektori $\vec{v} = \vec{v}(t)$ ja kiihtyvyysvektori $\vec{a} = \vec{a}(t)$
   b) Osoita, että $\vec{a} \perp \vec{v}$ (kaikilla ajan hetkillä)
   c) Osoita, että $\vec{a} = \vec{\Omega} \times \vec{v}$, missä $\vec{\Omega} = \omega\hat{k}$ (kaikilla ajan hetkillä).

2. a) Sievennä lauseke $\dfrac{3+i}{1+2i}$ muotoon $x+iy$.
   b) Laske kompleksiluvun $z = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$ kompleksikonjugaatin $\bar{z}$ itseisarvo ja argumentti (vaihekulma lausuttuna radiaaneina).
   c) Esitä kompleksiluku $\ln(\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i))$ muodossa $x+iy$.

3. Lämpötila xy -tasolla noudattaa yhtälöä $T = T_0 + C(x+y)$ missä $T_0 = 100^0\mathrm{C}$ ja $C = 20\ {}^0\mathrm{C/m}$.
   a) Määritä Lagrangen määräämättömien kertoimien menetelmää käyttäen maksimilämpötila paraabelilla $y = -ax^2 + b$, missä $a = \dfrac{1}{2\mathrm{m}}$ ja $b = 1\,\mathrm{m}$.
   b) Piirrä xy -tasoon muutamia lämpötilakentän tasa-arvokäyriä sekä ko. paraabeli, merkitse kuvioon a) -kohdassa löytämäsi lämpötilan ääriarvokohta. Perustele kuvion avulla, että kyseessä on tosiaankin lämpötilan maksimi. (Täsmällistä todistusta ei siis tarvitse esittää - pelkkä graafisen esityksen avulla tehty perustelu riittää.)

4. Kaasun paine tietyssä 3 -ulotteisessa tilavuudessa noudattaa yhtälöä
   $p(x,y,z) = x^3 + y^2 + 2z^2$ [Pa].
   a) Mihin suuntaan paine kasvaa nopeimmin pisteessä $P = (1,1,1)$ [m].
   b) Laske paineen muutosnopeus (kuljetun matkan suhteen) vektorin $\vec{u} = 2\hat{i} + \hat{j}$ suunnassa pisteessä P.
   c) Muodosta paineen lineaarinen approksimaatio pisteen P ympäristössä ja arvioi sen avulla kaasun paineen arvoa 0.5 metrin etäisyydellä ko. pisteestä vektorin $\vec{u}$ suuntaan.