FYSP112, Tentti **5.4.2013**

1. Olkoon annettu $\mathbb{R}^3$:n vektorit $\vec{a} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath}$, $\vec{b} = -\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$ ja $\vec{c} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + 2\hat{k}$
   a) Laske vektori $\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$.
   b) Onko vektorijoukko $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ lineaarisesti riippumaton vai lineaarisesti riippuva (perustele).
   c) Laske vektoreiden $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ virittämän suunnikkaan pinta-ala
   d) Laske vektoreiden $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ virittämän suuntaissärmiön tilavuus.

2. Määritä sellaisen $\mathbb{R}^3$:ssa määritellyn tasopinnan yhtälö, joka kulkee pisteen $(1, 1, 2)$ kautta ja on kohtisuorassa vektoria $\vec{n} = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \hat{k}$ vastaan.

3. Olkoon $\vec{A}(x, y) = \dfrac{x}{\pi} \sin(\pi y)\,\hat{\imath} + \dfrac{x^2}{1 + y^2}\,\hat{\jmath}$ vektoriarvoinen funktio (vektorikenttä) $\mathbb{R}^2$:ssa.
   Laske $\dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y \partial x}$ pisteessä $(x, y) = (-1, 1)$.

4. Olkoon $f(x, y) = x + y^2$.
   a) Laske funktion $f(x, y)$ ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat pisteessä $(1, 2)$.
   b) Mihin suuntaan funktion $f(x, y)$ arvot kasvavat nopeimmin pisteessä $(1, 2)$?
   c) Määritä funktion $f(x, y)$ tasa-arvokäyrän tangentin suuntainen yksikkövektori pisteessä $(1, 2)$.
   d) Laske funktion $f(x, y)$ suunnattu derivaatta pisteessä $(1, 2)$ origon suuntaan.

5. Määritä ellipsin $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ sisään piirretyn suorakaiteen suurin mahdollinen pinta-ala käyttäen Lagrangen määräämättömien kertoimien menetelmää.

6. a) Laske kompleksiluvun $\dfrac{(4 + 3i)i}{(1 - 2i)}$ reaaliosa ja imaginaariosa.
   b) Esitä kompleksiluku $\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$ polaarimuodossa.
   c) Olkoon $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + i)$. Laske $\dfrac{1}{z}$ ja $\ln(z)$ (esitä muodossa $x + yi$).

HUOM 1: Kaikissa tehtävissä on esitettävä laskujen välivaiheita niin, että laskun suoritusperiaate ilmenee.

HUOM 2: LUE TEHTÄVÄT HUOLELLISESTI!