

1. (a) Ratkaise potenssisarjayritteellä differentiaaliyhtälö

$$y' + by = 0 \quad ; \quad b = \text{vakio} .$$

- (b) Etsi differentiaaliyhtälön

$$y' + by = e^{-bx}$$

yleinen ratkaisu.

2. (a) Osoita, että hyperbeli  $y^2 - x^2 = 1$  on Clairautin differentiaaliyhtälön

$$y = xy' + \sqrt{1 - y'^2}$$

ratkaisu.

- (b) Etsi differentiaaliyhtälön

$$y = xy' + y' - y'^2$$

kaikki ratkaisut.

3. Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä

$$(y - 3x^2)dx - (4y - x)dy = 0 .$$

- (a) Osoita, että differentiaaliyhtälö on eksakti.  
 (b) Etsi differentiaaliyhtälön ratkaisukäyräparvi.  
 (c) Etsi hyperbeliparven

$$x^2 - y^2 = C , \quad C \in \mathbb{R}$$

kohtisuorien leikkaajien parvi.

4. (a) Etsi differentiaaliyhtälön

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

yleinen ratkaisu.

- (b) Etsi differentiaaliyhtälön

$$y'' - 3y' + 2y = e^x$$

yleinen ratkaisu.

- (c) Kappaleen liikettä maan painovoimakentässä kuvaa differentiaaliyhtälö

$$y'' = -\frac{GM}{y^2} , \quad y' = \frac{dy}{dt} ,$$

missä  $G$  on painovoimavakio,  $M$  on maan massa,  $t$  on aika ja  $y$  on kappaleen etäisyys maan keskipisteestä. Jos kappale alkaa pudota levosta äärettömän kaukana (käytännössä hyvin kaukana) maapallon keskipisteestä, niin millä nopeudella  $v_0$  se tömähtää maan pintaan, ts. etäisyydelle  $R$  maapallon keskipisteestä? Ilmoita  $v_0$   $G$ :n,  $M$ :n ja  $R$ :n funktiona.