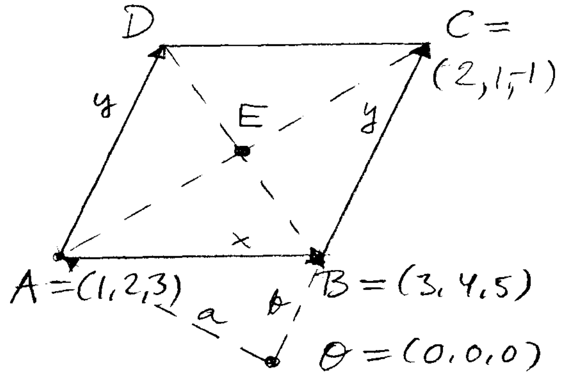
Approbatur 1A
Harjoitusmalli 1 / Ratkaisuja



1] Olkoot

$a = \overline{OA} = (1,2,3)$

$b = \overline{OB} = (3,4,5)$

$x = \overline{AB} = b - a$
$= (3,4,5) - (1,2,3)$
$= (2,2,2)$

$y = \overline{BC} = \overline{OC} - b$
$= (2,1,-1) - (3,4,5)$
$= (-1,-3,-6)$

Koska $\overline{AD} = \overline{BC} = y$, niin
$\overline{OD} = a + y = (1,2,3) + (-1,-3,-6) = (0,-1,-3)$

Siten $D = (0,-1,-3)$.

Halkaisijat puolittavat toisensa (lauseen on ja kirjan esim. 2.4 mukaan), joten

$\overline{AE} = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2}(\overline{OC} - \overline{OA}) =$
$= \frac{1}{2}[(2,1,-1) - (1,2,3)] = \frac{1}{2}(1,-1,-4)$
$= (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -2)$

Siten $\overline{OE} = a + \overline{AE} = (1,2,3) + (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -2)$
$= (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1)$

ja $E = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1)$

Vastaus: $D = (0,-1,-3)$ = 4. kärki
$E = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ = halk. leikkausp.

2] Muodostetaan laajennettu kerroinmatriisi:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -2 & 0 & -7 \\ -3 & 1 & 6 & -4 & 5 \\ 4 & -8 & -1 & 7 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ +3 \\ -4 \end{array}$$

(Eli $3R_1 + R_2 \to R_2$
$-4R_1 + R_3 \to R_3$)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -2 & 0 & -7 \\ 0 & 16 & 0 & -4 & -16 \\ 0 & -28 & 7 & 7 & 28 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \cdot 1/4 \\ \cdot 1/7 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -2 & 0 & -7 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & -4 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ +1 \end{array} \quad \cdot 1/4$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -2 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} -5 \\ \\ +2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 5/4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{5}{4}w = -2 \\ y - \frac{1}{4}w = -1 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 - \frac{5}{4}w \\ y = -1 + \frac{1}{4}w \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 - \frac{5}{4}t \\ y = -1 + \frac{1}{4}t \\ z = 0 \\ w = t \quad \text{(parametri)} \end{cases}$$

Ratkaisun voi myös ilmoittaa (myöhemmin hyödyllisessä) muodossa

$$\begin{aligned}(x,y,z,w) &= \left(-2 - \tfrac{5}{4}t, -1 + \tfrac{1}{4}t, 0, t\right) = \\ &= (-2, -1, 0, 0) + \left(-\tfrac{5}{4}t, \tfrac{1}{4}t, 0, t\right) \\ &= (-2, -1, 0, 0) + t\left(-\tfrac{5}{4}, \tfrac{1}{4}, 0, 1\right)\end{aligned}$$

Ratkaisujoukko on $\mathbb{R}^4$:n suora, joka kulkee pisteen $(-2,-1,0,0)$ kautta ja on vektorin $\left(-\frac{5}{4}, \frac{1}{4}, 0, 1\right)$ suuntainen.

3] a) $rx + sy = z$

$\Leftrightarrow r(2,4,-3) + s(3,6,-3) = (1,2,3)$

$\Leftrightarrow (2r+3s, 4r+6r, -3r-3s) = (1,2,3)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2r+3s = 1 \\ 4r+6s = 2 \\ -3r-3s = 3 \mid \cdot -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2r+3s = 1 \\ 0 = 0 \\ r+s = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2r+3s = 1 \\ r = -1-s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2-2s+3s = 1 \\ r = -1-s \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s = 3 \\ r = -4 \end{cases}$$

Siten $z = -4x + 3y$.

b) Ehdosta $rx + sy = w$ saadaan vastaavasti

$$\begin{cases} 2r+3s = 2 \\ 4r+6s = 3 \\ -3r-3s = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2r+3s = 2 \\ 0 = -1 \\ -3r-3s = 4 \end{cases} \lightning$$

Ei ole ratkaisua.

c) Ehdosta $rx + sy + tz = w$ saadaan nyt

$$\begin{cases} 2r+3s+t = 2 \\ 4r+6s+2t = 3 \\ -3r-3s+3t = 4 \end{cases} \Rightarrow 0 = -1 \lightning$$

Ei siis ole ratkaisua eli w:tä ei voida muiden lineaarikombinaationa esittää

Tämä seuraa myös siitä, että koska z on x:n ja y:n lin. kombinaatio, niin x:n, y:n ja z:n lin. kombinaatiot ovat edelleen vain x:n ja y:n lin. kombinaatioita ja sellainen w ei ollut.