APPROBATUR 1A
Harjoitusmalli 2

1) Annettu $u = (1,2,3)$.

a) Valitaan 2. kantavektoriksi jokin u:n kanssa erisuuntainen vektori, esim.

$v = (1,1,0)$ (joka ei ole u:n kantav.)

Kantaan tarvitaan vielä kolmas vektori, joka ei ole u:n ja v:n virittämä.

Kokeillaan esim.

$w = (0,1,1)$

Riittää osoittaa, että $\{u,v,w\}$ on lin. riton (jos ei ole on vektori w valittava toisin):

$$ru + sv + tw = \bar{0}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} r + s = 0 \\ 2r + s + t = 0 \\ 3r + t = 0 \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow$ (G-J)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -2 \\ -3 \end{array} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ -3 \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-\frac{1}{2}) \end{array} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} -1 \\ \\ +1 \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow r = s = t = 0.$$

Siten $\{u,v,w\}$ on lin. riippumaton ja koska näitä on $3 = \dim \mathbb{R}^3$ kpl, niin ne muodostavat kannan.

1) 1. kantavektorin e_1:n koordinaatit

b) Saadaan ehdosta

$$ru + sv + tw = e_1$$

$\Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Tekemällä täsmälleen samat muunnokset kuin edellä saadaan kerroinosa samaksi, mutta vakio-osa muuttuu seuraavaksi

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 \end{array}\right]$$

Siten $e_1 = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v - \frac{3}{2}w$ eli e_1:n koordinaatit ovat $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ ja $-\frac{3}{2}$.

[Huom: ei saa merkitä $e_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$]

Vastaavasti e_2:lle

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{array}\right]$$

ja siten $e_2 = -\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v + \frac{3}{2}w$.

Edelleen e_3:lle

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right]$$

ja siten $e_3 = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v - \frac{1}{2}w$.

2) Tutkitaan yhtälöä

a) $r_1 u_1 + r_2 u_2 + r_3 u_3 + r_4 u_4 + r_5 u_5 = \bar{0}$

eli

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

(Huomaa suoritusjärjestys!)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{"}0=0\text{"}$$

Voidaan valita esim. $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5 = 1$. eli $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = -u_5$.

Annetut vektorit ovat siten lin. riippuvat eivätkä näin ollen muodosta kantaa

b) Vaikka em. vektorit eivät muodosta kantaa, voivat ne silti virittää vektorin v. Tutkitaan yhtälöä

$r_1 u_1 + r_2 u_2 + r_3 u_3 + r_4 u_4 + r_5 u_5 = v$

eli

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{"}0=0\text{"}$$

Valitaan esim. $r_5 = 0$, jolloin $r_1 = 0$, $r_2 = 1$, $r_3 = -1$, $r_4 = -4$.

Siten $v = u_2 - u_3 - 4u_4$ ja on siis vektoreiden $u_1 - u_5$ virittämä.