

APPROBATUR 1A  
Harjoitustyö 2

1/3

1) Annettu  $u = (1, 2, 3)$ .

a) Valitaan 2 kantavektoriaa jokin  $u$ :n kanssa erisuuruisen vektorin, esim.

$$v = (1, 1, 0) \quad (\text{joka ei ole luonn. kantav.})$$

Kantava, tarvitaan vielä kolmas vektori, joka ei ole  $u$ :n ja  $v$ :n viritelmä, kokeillaan esim.

$$w = (0, 1, 1)$$

Riittävä osoittaa, että  $\{u, v, w\}$  on lin. riiton (jos ei ole on vektori  $w$  valittava toisin):

$$ru + sv + tw = \vec{0}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} r + s = 0 \\ 2r + s + t = 0 \\ 3r + t = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (2-3)$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow -2 \\ \leftarrow -3 \end{array} \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow +1 \\ \leftarrow -3 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow +1 \\ \leftarrow (-\frac{1}{2}) \end{array} \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow +1 \\ \leftarrow +1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow r = s = t = 0$$

Siten  $\{u, v, w\}$  on lin. riippumaton ja koska väite on  $\exists = \dim \mathbb{R}^3$  kpl, niin ne muodostavat kannan.

1) Kantavektorin  $e_1$  koordinaatit

2/3

b) Säädään edelleen

$$ru + sv + tw = e_1$$

$\Rightarrow$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Tekemällä  $2r - r_1$  ja  $3r - r_1$  saadaan u-muuttujat pois yhtälöistä ja edelleen kerrotaan saadut yhtälöt kahdella kolmella, jotta saadaan yksittäiset muuttujat.

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 \end{array} \right]$$

Siten  $e_1 = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v - \frac{3}{2}w$  eli  $e_1$  on koordinaatit ovat  $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$ .

[Huom: ei saa merkitä  $e_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ ]

Vastavasti  $e_2$ ille

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{array} \right]$$

joten  $e_2 = -\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v + \frac{3}{2}w$ .

Edelleen  $e_3$ ille

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array} \right]$$

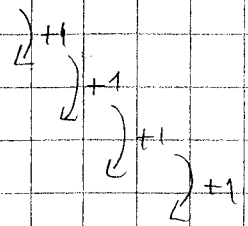
joten  $e_3 = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v - \frac{1}{2}w$ .

2) Tutkitaan yhtälöä

a)  $r_1 u_1 + r_2 u_2 + r_3 u_3 + r_4 u_4 + r_5 u_5 = \vec{0}$

eli

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & | & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$$



(Huomaa suoritus-  
järjestys!)

( $\Rightarrow$ ) 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Voimme valita esim.  
 $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5 = 1$ .  
eli  $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = -u_5$ .

"0=0"

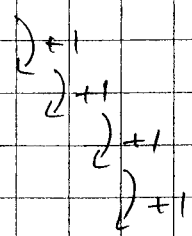
Annetaan vektorit ovat siten lin. riippuvat  
eivät ole näin ollen muodosta kantaa

b) Vaikka em. vektorit eivät muodosta kantaa,  
voivat ne silti virittää vektorin  $v$ . Tutkitaan  
yhtälöä

$r_1 u_1 + r_2 u_2 + r_3 u_3 + r_4 u_4 + r_5 u_5 = v$

eli

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & | & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & | & 4 \end{bmatrix}$$



( $\Rightarrow$ ) 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & | & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Valitaan esim.  
 $r_5 = 0$ , jolloin  
 $r_1 = 0, r_2 = 1,$   
 $r_3 = -1, r_4 = -4.$

"0=0"

Siten  $v = u_2 - u_3 - 4u_4$  ja on siis  
vektoreiden  $u_2 - u_3 - 4u_4$  virittämiä.