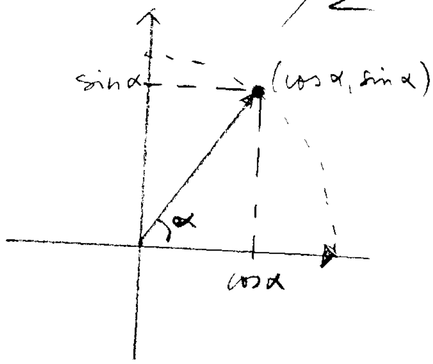
Approbatur 1A
Harjoitusmalli 5



1) a) Kierrolle K_α on

$$\begin{cases} K_\alpha(1,0) = (\cos\alpha, \sin\alpha) \\ K_\alpha(0,1) = (-\sin\alpha, \cos\alpha) \end{cases}$$

joten

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

b)
$$A_{\alpha+\beta} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$

c)
$$\mathrm{Mat}(K_\beta \circ K_\alpha) = A_\beta A_\alpha =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix}$$

d) Koska selvästi $K_{\alpha+\beta} = K_\beta \circ K_\alpha$, niin $A_{\alpha+\beta} = A_\beta A_\alpha$. Vertaamalla alkioita paikoissa 11 ja 21 saadaan, että

$$\begin{cases} \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{cases}$$

Myös paikkojen 12 ja 22 alkiot täsmäävät. Saadut kaavat ovat sinin ja kosinin summakulmakaavat.

2) a) Vektoria $u_1 = (2,-3,6)$ kohtisuorassa ovat vektorit 2/2

$$t\left(\tfrac{3}{2},1,0\right) + s(-3,0,1)$$ (Teht 1/Malli 3)

Valitaan esim. $u_2 = (3,2,0)$ $(t=2, s=0)$.

Ratkaistaan edelleen sellainen

$$u_3 = t(3,2,0) + s(-3,0,1)$$

jolle $u_3 \perp u_2$:

$$0 = (u_3 | u_2) = t(9+4+0) + s(-9+0+0)$$
$$= 13t - 9s$$

Valitaan $t = 9$ ja $s = 13$, jolloin

$$u_3 = (27,18,0) + (-39,0,13) = (-12,18,13)$$

Nyt $\{u_1,u_2,u_3\}$ on $\mathbb{R}^3$:n ortogonaalinen kanta.

b) Lineaarikuvaus L on projektio vektorille u_1 ja sen lauseke on

$$L(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{49}(4x_1-6x_2+12x_3, -6x_1+9x_2-18x_3, 12x_1-18x_2+36x_3)$$

(Teht 3/Malli 3). Tätä ei kuitenkaan tarvita!

Koska L on projektio u_1:lle ja $u_2 \perp u_1$ ja $u_3 \perp u_1$, niin

$$\begin{cases} L(u_1) = u_1 \\ L(u_2) = \bar{0} \\ L(u_3) = \bar{0} \end{cases}$$

Siten L:ää vastaa kannassa $\{u_1,u_2,u_3\}$ matriisi

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lisähuomio: Itse asiassa vektoreita u_2 ja u_3 ei tarvitse määrätä!