Approbatur 1A
Harjoitusmalli 6

1) Pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) kautta kulkevan suoran yhtälö on

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

(kun $x_2 \neq x_1$; jos $x_2 = x_1$, niin yhtälö on $x = x_1$)

$$\Leftrightarrow (y - y_1)(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$$

$$\Leftrightarrow x_2 y - x_1 y - x_2 y_1 + x_1 y_1 = x y_2 - x_1 y_2 - x y_1 + x_1 y_1$$

$$\Leftrightarrow x_2 y - x_1 y - x_2 y_1 - x y_2 + x_1 y_2 + x y_1 = 0.$$

Toisaalta
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x \cdot \begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} - y \cdot \begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x y_1 - x y_2 - x_1 y + x_2 y + x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0.$$

Saatiin samat lausekkeet. (Toimii myös jos $x_2 = x_1$)

2) Määrätään ensin ominaisarvot:

$$A x = r x \Leftrightarrow (A - rI)x = \bar{0} \quad (x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \det(A - rI) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 5-r & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 5-r & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -3-r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3-r \end{vmatrix} = (5-r)^2(-3-r) = 0$$

[yläkolmiomatriisin det on lävistäjien tulo]

$$\Leftrightarrow 5 - r = 0 \text{ tai } -3 - r = 0$$

$$\Leftrightarrow r = 5 \text{ tai } r = -3$$

Ominaisarvoja on vähemmän kuin matriisin koko, joten sen perusteella ei voi tietää ominaisvektoriavaruuden olemassaoloa. On selvitettävä kummallekin ominaisarvolle vastaavat ominaisvektorit.

$\underline{r=5}$ $\quad Ax = 5x \Leftrightarrow (A-5I)x = \bar{0}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -4 \\ -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} -1 \\ +1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = s \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad x = t(1,0,0,0) + s(0,1,0,0)$.

Valitaan ominaisvektoreiksi $u_1 = e_1$ ja $u_2 = e_2$.

$\underline{r=-3}$ $\quad Ax = -3x \Leftrightarrow (A+3I)x = \bar{0}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} 8x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ 8x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -t - s \\ x_2 = -4t + 2s \\ x_3 = 8t \\ x_4 = 8s \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad x = t(-1,-4,8,0) + s(-1,2,0,8)$

Valitaan ominaisvektoreiksi $u_3 = (-1,-4,8,0)$ ja $u_4 = (-1,2,0,8)$.

Jotta $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ olisi $\mathbb{R}^4$:n kanta, on niiden oltava lin. riippumattomat. Osoitetaan se osoittamalla että niiden muodostama determinantti ei ole nolla:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 8 = 64 \neq 0$$

[yläkolmiomatriisin det on lävistäjien tulo]

(Saman voi osoittaa "alkeisemmin" lineaarikombinaation avulla.)

<u>Lisätieto</u>: Jos $A = Mat(L)$, niin kannassa $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ lin. kuvausta L vastaa diagonaalimatriisi

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$