Approbatur 1B
Harjoitusmalli 3

1) a) Kun $x \to -2$, niin

$$f(x) = \frac{x^3+6x^2+10x+4}{2x^3+5x^2-4} \to \frac{-8+24-20+4}{-16+20-4} = \frac{0}{0} \text{ epämääräinen.}$$

Kun $x \neq -2$, niin

$$x^3+6x^2+10x+4 = (x+2)(x^2+4x+2)$$

$$2x^3+5x^2-4 = (x+2)(2x^2+x-2),$$

joten

$$f(x) = \frac{x^2+4x+2}{2x^2+x-2} \to \frac{4-8+2}{8-2-2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}, \text{ kun } x \to -2.$$

b) $$f(x) = \frac{1+\frac{6}{x}+\frac{10}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{2+\frac{5}{x}-\frac{4}{x^3}} \to \frac{1}{2}, \text{ kun } x \to \pm\infty.$$

2) Huomaa, että $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$.

Kun $x > 0$, niin

$$f(x) = \frac{\sqrt{3x^2+x}}{\sqrt{x^2}} = \sqrt{3+\frac{1}{x}} \to \sqrt{3}, \text{ kun } x \to +\infty$$

Kun $x < 0$, niin

$$f(x) = \frac{\sqrt{3x^2+x}}{-\sqrt{x^2}} = -\sqrt{3+\frac{1}{x}} \to -\sqrt{3}, \text{ kun } x \to -\infty.$$

3) Kumpikaan ei ole oikeassa! Annettu lauseke on rajalla kahdesti epämääräinen: $\frac{\infty}{\infty} - \infty$.
On muokattava lauseketta:

$$\frac{3x^2+2x}{x+5} - 3x = \frac{3x^2+2x-3x(x+5)}{x+5} = \frac{3x^2+2x-3x^2-15x}{x+5} =$$

$$= \frac{-13x}{x+5} = \frac{-13}{1+\frac{5}{x}} \to \frac{-13}{1+0} = -13, \text{ kun } x \to +\infty.$$

Päätelmä: Raja-arvoa ei saa laskea "osittain" eli ensin vain jossain lausekkeen osassa ja käyttää sitten saatua raja-arvoa koko lausekkeen arvioon.