Approbatur 1B
Harjoitusmalli 1

1) Merkitään $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Tällöin

$$x^2 = (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}$$

eli $x^2 - 5 = 2\sqrt{6}$. Korotetaan neliöön;

$$(x^2-5)^2 = 4 \cdot 6$$
$$\Leftrightarrow \quad x^4 - 10x^2 + 25 = 24$$
$$\Leftrightarrow \quad x^4 - 10x^2 + 1 = 0$$

Polynomilla $x^4 - 10x^2 + 1$ on siis juurena $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

Kaikki juuret:

$$x^4 - 10x^2 + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 = +5 \pm \sqrt{25-1} = 5 \pm 2\sqrt{6}$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{5 \pm 2\sqrt{6}}$$

Edeltä näkyy, että $\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{2}+\sqrt{3}$.
Vastaavasti voi huomata, että $\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$.
Siten $x = \pm(\sqrt{3} \pm \sqrt{2})$.

2) Väite $P(n)$: $2n^2 \geq (n+1)^2$, kun $n \geq 3$.

1° Kun $n = 3$, niin $2n^2 = 2 \cdot 9 = 18$ ja $(n+1)^2 = 4^2 = 16$.
Siten $2 \cdot 3^2 \geq (3+1)^2$.

2° Oletetaan, että $2n^2 \geq (n+1)^2$ ja $n \geq 3$.

3° On osoitettava, että $2(n+1)^2 \geq (n+2)^2$.

4° Todistetaan tämä:

Ensinnäkin $2(n+1)^2 = 2(n^2+2n+1) = 2n^2+4n+2 \geq$
$\geq (n+1)^2 + 4n + 2 = n^2+2n+1+4n+2 = n^2+6n+3$,

Toisaalta $(n+2)^2 = n^2+4n+4$.

Koska $n \geq 3$, niin $2n-1 \geq 5$ ja siten
$2(n+1)^2 \geq n^2+6n+3 = n^2+4n+4 + 2n-1 \geq$
$\geq (n+2)^2 + 5 \geq (n+2)^2$.

Induktiopäättely on valmis ja näin ollen
$2n^2 \geq (n+1)^2$, kun $n \geq 3$ (ja $n \in \mathbb{N}$).

3] Olkoon $a \geq 3$. Tällöin

$$2a^2 \geq (a+1)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2a^2 - (a+1)^2 \geq 0$$

Nyt $2a^2 - (a+1)^2 = 2a^2 - (a^2+2a+1) = a^2 - 2a - 1 =$

$= a(a-2) - 1 \geq 3 \cdot 1 - 1 = 2 \geq 0$,

joten väite pätee

4] Olkoon ensin $a \geq b$, jolloin $a - b \geq 0$. Silloin

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(a+b+|a-b|) = \frac{1}{2}(a+b+a-b) = a = \max\{a,b\} \\ \frac{1}{2}(a+b-|a-b|) = \frac{1}{2}(a+b-(a-b)) = b = \min\{a,b\}, \end{cases}$$

Jos sitten $a < b$, niin $a - b < 0$ ja

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(a+b+|a-b|) = \frac{1}{2}(a+b-(a-b)) = b = \max\{a,b\} \\ \frac{1}{2}(a+b-|a-b|) = \frac{1}{2}(a+b+a-b) = a = \min\{a,b\}, \end{cases}$$