Approbatur 1B
Harjoitusmalli 4

1) Selvitetään, onko raja-arvoja ko. pisteissä:

$x = 0$

$$f(x) = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^2} = \frac{\sin x \cdot \frac{1-\cos x}{\cos x}}{x^2} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1-\cos x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}$$

Tulon tekijöiden raja-arvot, kun $x \to 0$:

$$\frac{\sin x}{x} \to 1, \qquad \frac{1}{\cos x} \to \frac{1}{1} = 1 \qquad \text{ja}$$

$$\frac{1-\cos x}{x} = \frac{1-(1-2\sin^2\frac{x}{2})}{x} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \sin\frac{x}{2} \to 1 \cdot 0 = 0$$

Siispä $f(x) \to 1 \cdot 0 \cdot 1 = 0$, kun $x \to 0$.

Lisämäärittelyllä $f(0) = 0$ on $f(x)$ jatkuva nollassa.

$x = \pi/2$

$$f(x) = \frac{\tan x - \sin x}{x^2} \xrightarrow[x \to \frac{\pi}{2}-]{} \frac{\infty - 0}{(\frac{\pi}{2})^2} = \infty,$$

joten f:ää ei voi määritellä jatkuvaksi, kun $x = \frac{\pi}{2}$.

2) Sini ja kosini ovat jaksollisia, jakso on 2π, joten $f(x)$ saa kaikki arvonsa välillä $[0, 2\pi]$. Trig. funktiot ovat jatkuvia, joten $f(x)$ on myös. Weierstrassin lauseen mukaan se saa pienimmän ja suurimman arvonsa suljetulla välillä $[0, 2\pi]$.

Koska
$$f(x) = \sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x =$$
$$= 1 - \sin 2x,$$

niin suurin arvo on $f(-\frac{\pi}{2}) = 1 + 1 = 2$ ja pienin arvo on $f(\frac{\pi}{2}) = 1 - 1 = 0$.

3)
$$\text{Eom} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{a-(a+h)}{(a+h)ah} =$$
$$= \frac{-h}{(a+h)ah} = \frac{-1}{(a+h)a} \to \frac{-1}{a \cdot a} = -\frac{1}{a^2}, \text{ kun } h \to 0.$$

Siten $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$

(eli $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$).

4) a) 1° $n = 2 \Rightarrow (x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$

$= x^2 + 2xh + h^2 \cdot 1$ ok

2° Oletetaan, että $(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + h^2 p(x)$

3° Väitetään, että $(x+h)^{n+1} = x^{n+1} + (n+1)x^n h + h^2 q(x)$ jollekin polynomille $q(x)$.

4° Todistus:

$(x+h)^{n+1} = (x+h)(x+h)^n = (x+h)(x^n + nx^{n-1}h + h^2 p(x)) =$

$= x^{n+1} + nx^n h + h^2 x p(x) +$

$+ x^n h + nx^{n-1}h^2 + h^3 p(x) =$

$= x^{n+1} + (n+1)x^n h + h^2 \underbrace{[x p(x) + nx^{n-1} + h p(x)]}_{q(x)}$

($q(x)$ on polynomi, koska se muodostuu rationaalisesti polynomeista)

b) Eom $= \dfrac{(x+h)^n - x^n}{h} = \dfrac{x^n + nx^{n-1}h + h^2 p(x) - x^n}{h}$

$= nx^{n-1} + h p(x) \to nx^{n-1} + 0 \cdot p(0) = nx^{n-1}$,

Siten $f'(x) = nx^{n-1}$.

***