Approbatur 1B
Harjoitusmalli 5

1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\sin x}$ on määritelty, kun $x > 0$ ja $x \neq n\pi$ $(n \in \mathbb{N})$. Se muodostuu rationaalisesti derivoituvista funktioista, joten se on derivoituva määrittelyjoukossaan. Derivaatta on

$$f'(x) = D(\sqrt{x}\sin x)^{-1} = (-1)(\sqrt{x}\sin x)^{-2} \cdot D(\sqrt{x}\sin x) =$$
$$= \frac{-1}{x\sin^2 x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x + \sqrt{x}\cos x\right)$$
$$= -\frac{\sin x + 2x\cos x}{2x\sqrt{x}\sin^2 x}.$$

2) Kun $x \neq n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$, niin

$$f'(x) = D(\sin x)^{-1} = -(\sin x)^{-2} \cdot D\sin x =$$
$$= -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

Välillä $]0, \frac{\pi}{2}[$ on $f'(x) < 0$, joten $f(x)$ on aidosti vähenevä tällä välillä ja siten injektio. Koska $f(x) \to \infty$, kun $x \to 0+$, ja $f(x) \to 1$, kun $x \to \frac{\pi}{2}-$, niin $A_f =]1, \infty[$. Siten f on bijektio

$$f :]0, \tfrac{\pi}{2}[\to]1, \infty[.$$

Kun $y = f(x) = 2$, niin $\sin x = \frac{1}{2}$ eli $x = \frac{\pi}{6} = 30°$. Edelleen $f'(\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}/2}{(1/2)^2} = -2\sqrt{3}$. Siten

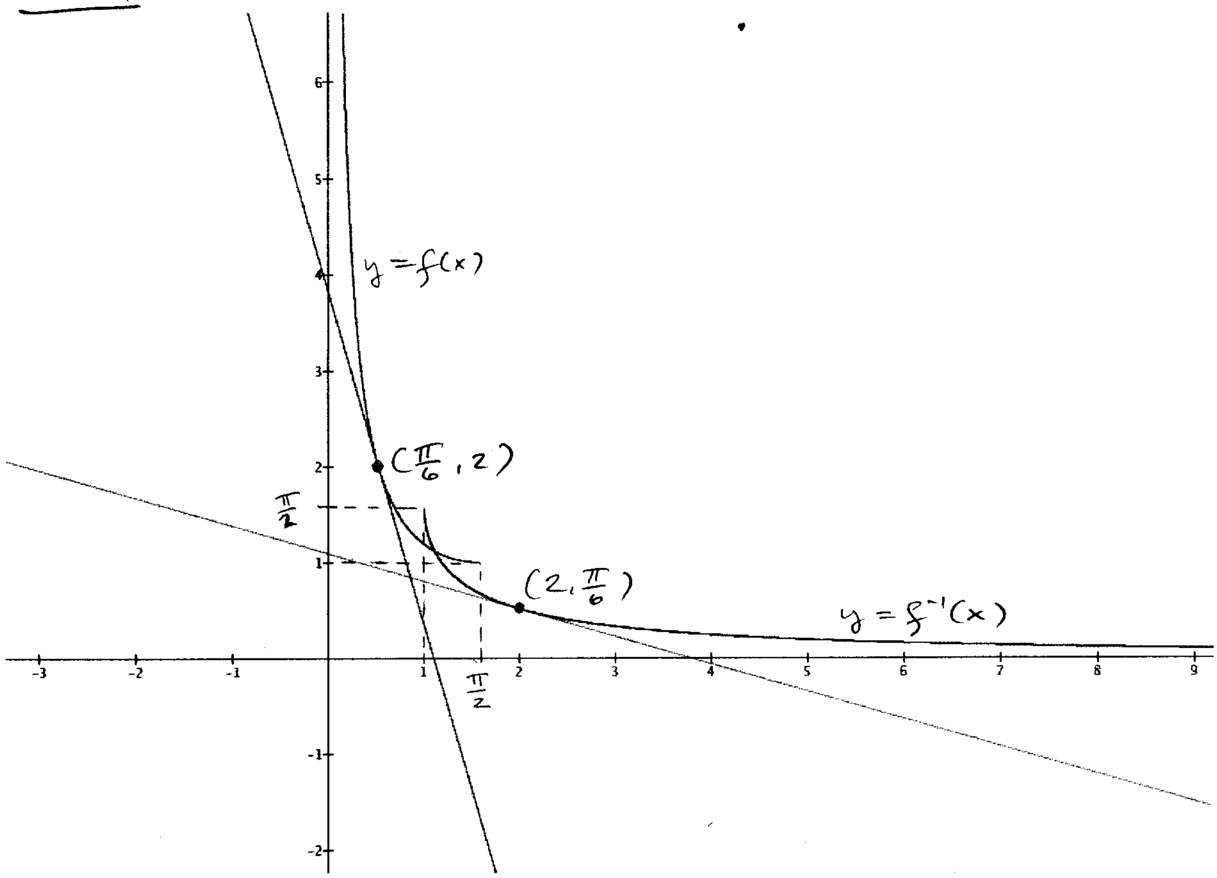
$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(\frac{\pi}{6})} = \frac{1}{-2\sqrt{3}} = -\frac{1}{6}\sqrt{3}.$$

Kuva →

3) $$2xy + \pi\sin y = 2\pi$$
$$\Leftrightarrow \quad 2x f(x) + \pi\sin f(x) = 2\pi$$
$$\Rightarrow D[\quad \text{—}''\text{—} \quad] = D(2\pi)$$
$$\Rightarrow 2f(x) + 2x f'(x) + \pi\cos f(x) \cdot f'(x) = 0$$
$$\Rightarrow [2x + \pi\cos f(x)]\, f'(x) = -2f(x)$$
$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-2f(x)}{2x + \pi\cos f(x)}.$$

Jk. →

Kuva



3) Jk.

Kun $x=1$, niin $2y+\pi\sin y = 2\pi$.
Tämä toteutuu (ainakin) kun $y=\frac{\pi}{2}$, $y=\pi$ tai $y=\frac{3\pi}{2}$.
Selvitetään tapaukset erikseen.

$y=\frac{\pi}{2}$: Silloin

$$f'(1) = \frac{-2\cdot\frac{\pi}{2}}{2+\pi\cos\frac{\pi}{2}} = \frac{-\pi}{2}$$

ja tangenttisuora on

$$y-\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}(x-1) \quad \text{eli} \quad y = -\frac{\pi}{2}x+1+\frac{\pi}{2}.$$

$y=\pi$: Nyt $f'(1) = \dfrac{-2\pi}{2+\pi(-1)} = \dfrac{2\pi}{\pi-2}$ ja

$$y-\pi = \frac{2\pi}{\pi-2}(x-1) \quad \text{eli} \quad y = \frac{2\pi}{\pi-2}x - \frac{2\pi}{\pi-2}+\pi$$

$y=\frac{3\pi}{2}$: Nyt $f'(1) = \dfrac{-2\cdot\frac{3}{2}\pi}{2+\pi\cdot 0} = -\frac{3}{2}\pi$ ja

$$y-\frac{3\pi}{2} = -\frac{3}{2}\pi(x-1) = -\frac{3}{2}\pi x+3\pi.$$

Kyseessä on siis kolme eri ratkaisufunktiota!

Kuva $\rightarrow$

3) Jk.

Kuva