1) Koska sin ja cos ovat jaksollisia, jakso on sama 2π, on $f(x) = \frac{1-\cos x}{\sin x}$ myös jaksollinen, jakso on 2π. $f(x)$ on määritelty, kun $\sin x \neq 0$ eli $x \neq 2n\pi$.

a) Kun $x \to 0$, niin $f(x) \to \frac{0}{0}$. Käytetään l'Hospitalin sääntöä:

$$\frac{D(1-\cos x)}{D\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x} \to \frac{0}{1} = 0, \text{ kun } x \to 0.$$

Siten myös $f(x) \to 0$, kun $x \to 2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Kun $x \to \pi + 2n\pi$, niin $f(x) \to \frac{1+1}{0\mp} = \mp\infty$.

Siten suorat $x = \pi + 2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ ovat asymptootteja.

Koska $f(x)$ on jaksollinen, ei sillä ole vaaka-asymptootteja.

b) $$f'(x) = \frac{\sin x \cdot \sin x - (1-\cos x)\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - \cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} \neq 0, \text{ kun } x \in M_f.$$

f:llä ei siten ole paik. ääriarvokohtia.

c) Koska $f'(x) > 0$ aina, on $f(x)$ aidosti kasvava kaikilla määrittelyväleillään eli välillä $]0, \pi[$ ja sen πn-siirroilla.

Jokaisella näillä väleillä f:llä on käänteisfunktio; sen määrittelyjoukko on joko

$f(]0,\pi[) =]0,\infty[$ tai

$f(]\pi,2\pi[) =]-\infty, 0[$.

$\boxed{\text{Kuva 1}} \rightarrow$

2] $f(x) = \dfrac{2x^3}{1+x^3}$ on määritelty, kun $1+x^3 \neq 0$
eli $x \neq -1$.

a) Kun $x \to -1\pm$, niin
$f(x) \to \dfrac{-2}{0\pm} = \mp\infty$, joten $x=-1$ on asymptootti

Kun $x \to \pm\infty$, niin $f(x) = \dfrac{2}{\frac{1}{x^3}+1} \to \dfrac{2}{0+1} = 2$,

joten $y=2$ on asymptootti.

b) $f'(x) = \dfrac{6x^2(1+x^3) - 2x^3 \cdot 3x^2}{(1+x^3)^2} = \dfrac{6x^2}{(1+x^3)^2} = 0 \Leftrightarrow x=0$

$f'(x) > 0$, kun $x \neq -1$ ja $x \neq 0$, joten $f(x)$ on aid. kasvava määrittelyväleillään eli väleillä $]-\infty,-1[$ ja $]-1,\infty[$.
Paikallisia ääriarvoja ei siten ole.

c) $f''(x) = \dfrac{12x(1+x^3)^2 - 6x^2 \cdot 2(1+x^3)\cdot 3x^2}{(1+x^3)^4} =$

$= \dfrac{x(1+x^3)(12+12x^3-36x^3)}{(1+x^3)^4} = \dfrac{12x(1-2x^3)}{(1+x^3)^3}$

$= 0 \Leftrightarrow x=0$ tai $x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Merkkikaavio

	-1	0	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	
$12x$	$-$	$-$	$+$	$+$
$1-2x^3$	$+$	$+$	$+$	$-$
$(1+x^3)^3$	$-$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

f on alasp. kupera väleillä $]-\infty,-1[$ ja $[0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}]$
f " ylösp. " " $]-1, 0]$ ja $[\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \infty[$.

Käännekohdat: $x=0$ ja $x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ (f'':n merkit vaihtuvat)

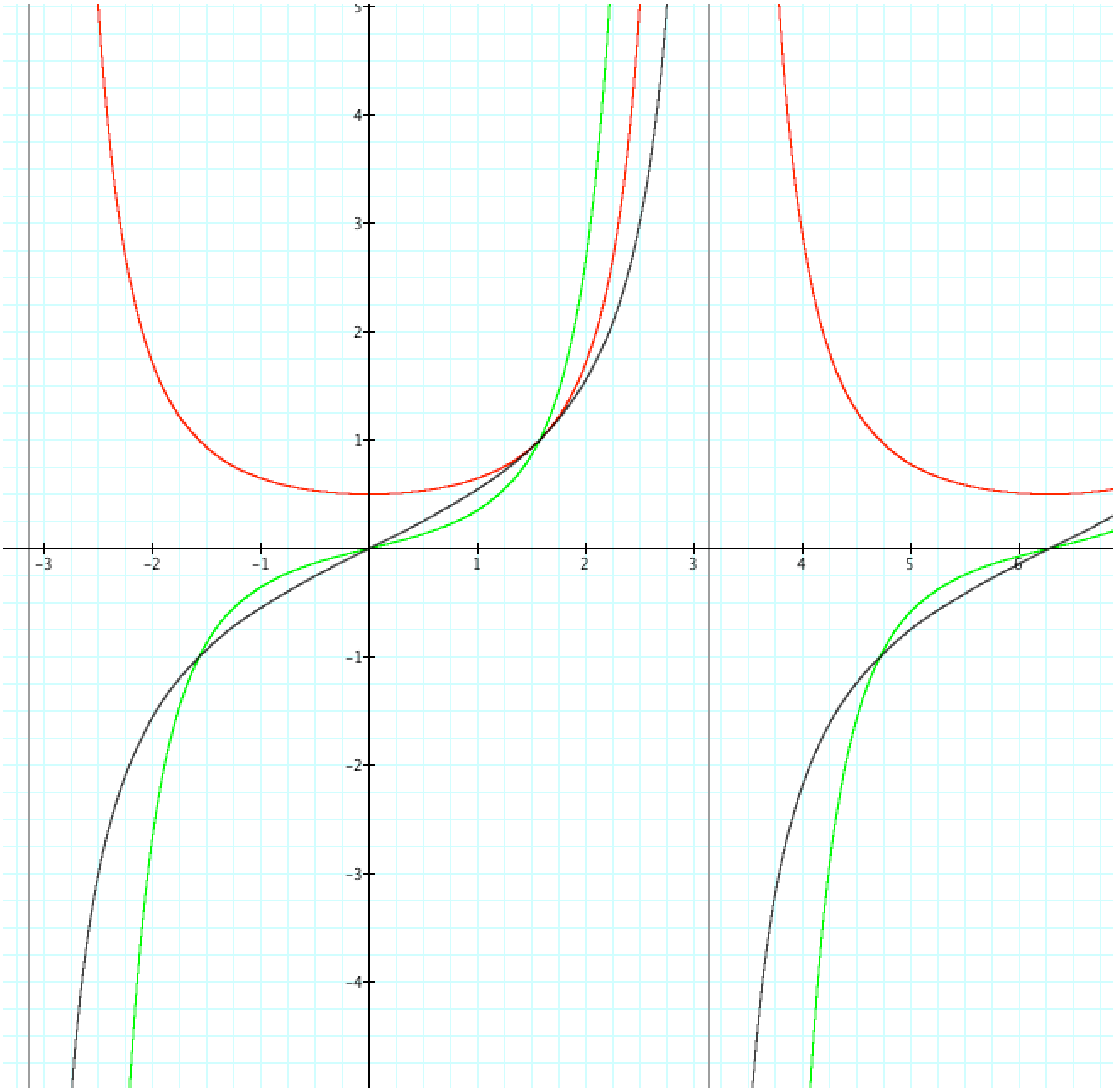
$\boxed{\text{Kuva 2}} \longrightarrow$

Approbatur 1 B, Harjoitusmalli 6, Tehtävä 1

$$y = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

$$y = \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$$

$$y = \frac{1 + \cos^2 x - 2\cos x}{\sin^3 x}$$



Approbatur 1 B, Harjoitusmalli 6, Tehtävä 2

$$y = \frac{2x^3}{1 + x^3}$$

$$y = \frac{6x^2}{(x^3 + 1)^2}$$

$$y = \frac{12x - 24x^7 - 12x^4}{(x^3 + 1)^4}$$