APPROBATUR 2A

HELI TUOMINEN JA VELI-MATTI HOKKANEN

3. maaliskuuta 2005

Sisältö

Luku 0

Esipuhe

Käsilläsi on integraalilaskentaa ja tavallisia differentiaaliyhtälöitä käsittelevän matematiikan approbatur-kurssin luentomoniste. Kurssi pidettiin Jyväskylän yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitoksessa kevätlukukaudella 2005.

Monisteessa on seitsemän lukua. Ensimmäisessä tutustutaan integraaliin derivaatan käänteisoliona, antiderivaattana. Opitaan koko joukko tekniikoita, joilla annetun kuvauksen antiderivaatta eli integraalifunktio lasketaan. Todetaan, että joskus intgraalifunktio löytyy helposti, joskus vain kovalla työllä ja joskus ei mitenkään.

Toisessa luvussa tutustutaan integraaliin tasoalueen pinta-alana. Määritellään huolella Riemann-integraali porrasfunktioiden sekä ala- ja yläintegraalin avulla. Riemannin ehto opitaan, samoin integraalin perusominaisuuksia (lineaaarisuus, vertailuperiaatteet).

Kolmannessa luvussa löydetään yhteys antiderivaatan ja Riemann-integraalin välille: jos kuvaus $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja F sen antiderivaatta, niin

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(b).$$

Neljännessä luvussa opitaan epäoleelliset integraalit niin rajoittamattoman integrointivälin kuin rajoittamattoman kuvauksen tapauksessa.

Viidennessä luvussa sovelletaan integraalin käsitettä tasokuvioiden pinta-alaan, pyörähdyskapaleiden tilavuuteen sekä matkan, nopeuden ja kiihtyvyyden käsitteisiin. Lopuksi opitaan kolme numeerista menetelmää Riemann-integraalien laskemiseksi.

Kuudennessa luvussa perehdytään ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöihin: differentiaaliyhtälön ja sen ratkaisun käsitteet opitaan. Monista eri ratkaisumenetelmistä valitaan separointimenetelmä, joka käydään huolella läpi. Lineaaristen differentiaaliyhtälöiden ratkaisukaava (vakionvarioimiskaava) opitaan. Gronwallin epäyhtälö esitetään ja todistetan. Sitä käytetään sen perustelemiseen, että on löydetty kaikki kulloisenkin differentiaaliyhtälön tai alkuarvotehtävän ratkaisut.

Seitsemännnessä luvussa määritellään yleinen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö ja sen ratkaisu. Lineaaristen yhtälöiden ratkaisumenetelmä opitaan ja sitä sovelleteaan kitkaiseen harmoniseen oskillaattoriin.

Monisteen integraalilaskennan osa on olennaisesti LaTeX-ladontaohjelmalla puhtaaksi kirjoitettu versio Heli Tuomisen käsinkirjoitetusta luentomonisteesta, jonka hän laati luennoidessaan kurssia kevätlukukaudella 2004. Differentiaaliyhtälöiden esityksen laadin itse, koska tänä keväänä aikaa ja tarmoa käytettiin viimevuotista enemmän integraalilaskentaan. Differentiaaliyhtälöiden perusasiat tuli siksi käsitellä vauhdikkaamin kuin viime vuonna. Koko monisteen osalta paino- ja asiavirheistä tulee torua yksin minua.

Jyväskylässä 3. maaliskuuta 2005

Veli-Matti Hokkanen

OSA I

INTEGRAALILASKENTAA

Luku 1

Integraalifunktio

1.1 Antiderivaatta

Differentiaalilaskennassa etsittiin annetun kuvauksen f derivaattaa f'. Jos esimerkiksi $f(x) = x^3$, niin $f'(x) = 3x^2$. Integraalilaskennassa on käänteinen tehtävä: kuvaus f on annettu, ja on määrättävä toinen kuvaus F siten, että $F'(x) = f(x)$ kaikilla x. Joskus tämä tehtävä on helppo kuten tapauksessa $f(x) = x^3$. Silloin oitis huomataan, että kuvaukseksi F kelpaa $F(x) = x^4/4$. Joskus muulloin tehtävä on mahdoton kuten tapauksessa $f(x) = \exp x^2$. Silloin on varsin helppo osoittaa, että F on kyllä olemassa ja laskea sen arvoille likiarvoja, mutta yksinkertaista lauseketta alkeisfunktioiden avulla sille ei ole olemassa.

1.1 Määritelmä. *Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ väli. Kuvaus $F\colon I \to \mathbb{R}$ on kuvauksen $f\colon I \to \mathbb{R}$ integraalifunktio, jos F on derivoituva välillä I ja $F'(x) = f(x)$ kaikilla $x \in I$.*

Integraalifunktiosta käytetään myös nimityksiä *antiderivaatta* ja *primitiivi*.

1.2 Huomautus. Määritelmänsä mukaan antiderivaatta on derivoituva, joten se on myös jatkuva.

1.3 Esimerkki. Haetaan kuvauksen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2$ antiderivaatta. Koska kuvaus $\hat{F}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\hat{F}(x) = x^3$ on derivoituva välillä $\mathbb{R}$ ja $\hat{F}'(x) = 3x^2 = f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, niin $\hat{F}$ on kuvauksen f antiderivaatta. Lisäksi huomataan, että jokaiselle vakiolle $C \in \mathbb{R}$ pätee $D\big(\hat{F}(x)+C\big) = f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Siten kuvaukset $F(x) = x^3 + C$ ovat kaikki haettuja antiderivaattoja.

Tämän esimerkin kaltainen tilanne pätee kaikille kuvauksille f, joilla on integraalifunktio $\hat{F}$. Voisiko kuvauksella f olla muitakin integraalifunktioita kuin $\hat{F}(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$? Vastaus on *ei*. Seuraava lause sanoo, että antiderivaatta on lisättävää vakiota vaille yksikäsitteinen.

1.4 Lause. *Olkoon $F\colon I \to \mathbb{R}$ kuvauksen $f\colon I \to \mathbb{R}$ antiderivaatta. Tällöin kuvaus $G\colon I \to \mathbb{R}$ on kuvauksen f antiderivaatta, jos ja vain jos jollakin reaaliluvulla C pätee*

$$G(x) = F(x) + C \text{ kaikilla } x \in I.$$

Todistus. Ehdon riittävyys. Olkoon jollekin $C \in \mathbb{R}$ voimassa $G(x) = F(x) + C$ kaikilla $x \in I$. Silloin G on derivoituva välillä I ja $G'(x) = F'(x) = f(x)$ kaikilla $x \in I$. Siten myös G on kuvauksen f antiderivaatta.

Ehdon välttämättömyys. Olkoon $G\colon I \to \mathbb{R}$ kuvauksen $f\colon I \to \mathbb{R}$ antiderivaatta. Tällöin

$$\frac{d}{dx}\big(G(x) - F(x)\big) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

kaikilla $x \in I$. Tästä seuraa[1], että $G(x) - F(x)$ on vakio välillä I eli on olemassa $C \in \mathbb{R}$ siten, että

$$G(x) - F(x) = C \text{ kaikilla } x \in I.$$

Siten $G = F + C$. **m.o.t.**

1.5 Esimerkki. Etsi kuvauksen f antiderivaatta, kun

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{jos } x \geq 1, \\ -x + 1, & \text{jos } x < 1. \end{cases}$$

Rajoittumalla väleihin $]-\infty, 1[$ ja $[1, \infty[$ saadaan

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x + C_1, & \text{jos } x > 1, \\ -\frac{1}{2}x^2 + x + C_2, & \text{jos } x < 1, \end{cases}$$

missä vakiot C_1 ja C_2 voivat olla eri lukuja. Kuvauksen F on oltava jatkuva myös pisteessä $x = 1$, joten

$$\lim_{x \to 1+} F(x) = \lim_{x \to 1-} F(x)$$

eli $1/2 - 1 + C_1 = -1/2 + 1 + C_2$ eli $C_1 = C_2 + 1$. Nyt kuvaus $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + C + 1, & \text{jos } x \geq 1, \\ -\frac{1}{2}x^2 + x + C, & \text{jos } x < 1, \end{cases}$$

on derivoituva[2] ja $F'(x) = f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ eli F on kuvauksen f antiderivaatta. Vakion C käydessä läpi kaikki reaaliluvut syntyy ns. *integraaliparvi* eli joukko $\{F \mid C \in \mathbb{R}\}$, joka on kaikkien kuvauksen f antiderivaattojen joukko. Jos esimerkiksi halutaan, että $F(0) = 0$, niin $C = 0$.

1.6 Esimerkki. Haetaan kuvauksen

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{jos } x \geq 0, \\ \mathrm{e}^x, & \text{jos } x < 0, \end{cases}$$

se antiderivaatta $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolle $F(1) = 2$. Rajoittumalla väleihin $]-\infty, 0[$ ja $]0, \infty[$ nähdään heti antiderivaatat niillä:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + x + C_1, & \text{jos } x > 0, \\ \mathrm{e}^x + C_2, & \text{jos } x < 0 \end{cases}$$

missä $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Ehdosta $F(1) = 2$ seuraa $1/3 + 1 + C_1 = 2$ eli $C_1 = 2/3$. Toinen vakio saadaan kuvauksen F jatkuvuudesta, sillä silloin F on jatkuva erityisesti pisteessä $x = 0$, jolloin

$$\lim_{x \to 1-} F(x) = \lim_{x \to 1+} F(x)$$

eli $1/3 \cdot 0^3 + 0 + 2/3 = \mathrm{e}^0 + C_2$ eli $C_2 = -1/3$. Siten haetuksi antiderivaataksi kelpaa vain

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + x + \frac{2}{3}, & \text{jos } x \geq 0, \\ \mathrm{e}^x - \frac{1}{3}, & \text{jos } x < 0. \end{cases}$$

Vielä on tarkastettava, että tämä kuvaus on derivoituva origossa ja $F'(0) = f(0)$. Se voidaan tehdä jälleen tarkastelemalla erotusosamäärän raja-arvoa origossa. Derivoituvuus origossa seuraa myös siitä, että raja-arvo $\lim_{x \to 0} F'(x)$ on olemassa ja F on jatkuva[3]. Koska tuo raja-arvo on 1$= f(0)$, niin löydetty F on haettu antiderivaatta.

1. Muista väliarvolause. Olkoot $x, x_0 \in I$, $x \neq x_0$. Silloin jollakin ξ lukujen x ja x_0 välistä pätee

$$\big(G(x) - F(x)\big) - \big(G(x_0) - F(x_0)\big) = \big(G'(\xi) - F'(\xi)\big)(x - x_0) = 0 \cdot (x - x_0) = 0.$$

2. Tämä vaatii hieman laskemista. Väleillä $]-\infty, 1[$ ja $]1, \infty[$ F on polynomi, ja se derivoidaan potenssifunktion derivoimissäännön avulla. Pisteessä $x = 1$ on yksinkertaisinta laskea erotusosamäärän $(F(1 + h) - F(1))/h$ raja-arvoa, kun $h \to 0$ ja huomata, että se on nolla.
3. Tässäkin sovelletaan väliarvolausetta , jonka mukaan lukujen 0 ja h välissä on luku ξ siten, että

$$\frac{F(h) - F(0)}{h} = F'(\xi) = f(\xi) \to f(0),$$

kun $h \to 0$, sillä f on jatkuva.

1.7 Määritelmä. *Jos $F : I \to \mathbb{R}$ on kuvauksen $f : I \to \mathbb{R}$ antiderivaatta, niin kuvauksen f (määräämätön) integraali on $F(x)+C$, missä $C \in \mathbb{R}$. Tällöin merkitään*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Jos kuvauksella f on antiderivaatta, niin sanotaan, että f on integroituva.

1.8 Huomautus. Kaikilla kuvauksilla ei ole integraalifunktiota. Sellainen on esimerkiksi

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{jos } x \neq 0, \\ 0, & \text{jos } x = 0. \end{cases}$$

Toisaalta yksinkertaisenkin kuvauksen integraalifunktion löytäminen voi olla vaikeaa. On olemassa myös sellaisia yksinkertaisia kuvauksia, joiden integraalifunktiot eivät ole alkeiskuvauksia, esimerkiksi

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^4}},\ \frac{1}{\ln x},\ \mathrm{e}^{x^2},\ \frac{\sin x}{x}.$$

1.2 Integroimiskaavoja

Integraalifunktion määritelmästä ja derivointikaavoista saadaan integrointikaavoja.

1.9 Lause.

$f(x) = F'(x)$	$F(x)$	*laajin väli*
a ($a =$ ***vakio*** $\in \mathbb{R}$)	$ax + C$	$\mathbb{R}$
$x^p,\ p \in]-1, \infty[$	$\frac{1}{p+1}x^{p+1} + C$	$\mathbb{R}$, ***jos*** $p \in \mathbb{N}$
$x^p,\ p \in]-\infty, -1[$	$\frac{1}{p+1}x^{p+1} + C$	$]-\infty, 0[$ ***tai*** $]0, \infty[$, ***jos*** $p \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$]-\infty, 0[$ ***tai*** $]0, \infty[$
e^x	$\mathrm{e}^x + C$	$\mathbb{R}$
$a^x,\ a \in]0, \infty[\setminus\{1\}$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$	$]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[,\ n \in \mathbb{Z}$
$\cot x$	$\ln\lvert\sin x\rvert + C$	$]n\pi, n\pi + \pi[,\ n \in \mathbb{Z}$
$\sin^{-2} x$	$-\cot x + C$	$]n\pi, n\pi + \pi[,\ n \in \mathbb{Z}$
$\cos^{-2} x$	$\tan x + C$	$]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[,\ n \in \mathbb{Z}$
$\sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$	$\cosh x + C$	$\mathbb{R}$
$\cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$	$\sinh x + C$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$	$]-1, 1[$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arsinh} x + C = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arcosh} x + C = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2-1}\right\rvert + C$	$]-\infty, -1[$ ***tai*** $]1, \infty[$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{artanh} x + C = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + C$	$]-1, 1[$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\mathrm{arcoth\,x + C = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{x-1} + C}$	$]-\infty, -1[$ ***tai*** $]1, \infty[$
$f(x)^n f'(x), n \neq 1$	$\frac{1}{n+1}f(x)^{n+1} + C$	
$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln\lvert f(x)\rvert + C$	

Seuraavaksi käsitellään menetelmiä, joilla monet integrointitehtävät voidaan palauttaa taulukoitujen alkeisfunktioiden integroimiseksi. Tärkeimmät näistä menetelmistä ovat integraalin lineaarisuuden hyödyntäminen, integrointi osittain ja muuttujanvaihto.

1.10 Lause. Integraalin lineaarisuus. *Olkoot kuvauksilla* $f: I \to \mathbb{R}$ *ja* $g: I \to \mathbb{R}$ *integraalifunktio ja* $k \in \mathbb{R}$. *Tällöin myös kuvauksilla*[4] $f+g: I \to \mathbb{R}$ *ja* $kf: I \to \mathbb{R}$ *on integraalifunktio ja*

$$\int \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx, \tag{1.1}$$

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx. \tag{1.2}$$

Todistus. Olkoon F kuvauksen f antiderivaatta ja G kuvauksen g antiderivaatta. Silloin derivaatan lineaarisuuden nojalla

$$\frac{d}{dx}\big(F(x)+G(x)\big) = F'(x)+G'(x) = f(x)+g(x) \quad \text{ja} \quad kF(x) = kF'(x) = kf(x)$$

kaikilla $x \in I$. Siten $F+G$ on kuvauksen $f+g$ antiderivaatta ja kF on kuvauksen kf antiderivaatta. Määräämättömän integraalin määritelmän nojalla kaavat (1.1) ja (1.2) pitävät paikkansa. **m.o.t.**

1.11 Esimerkki. Kaavojen (1.1) ja (1.2) avulla polynomin integroiminen palautuu potenssifunktion integroimiseksi:

$$\begin{aligned}\int (1+x^2)\,dx = \int (1+2x+x^2)\,dx &= \int 1\,dx + 2\int x\,dx + \int x^2\,dx \\ &= x + 2\cdot\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + C = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + C.\end{aligned}$$

Huomaa, että kolmesta eri integraalista tulevat vakiot voidaan yhdistää yhdeksi.

1.12 Esimerkki. Potenssien summa, jossa on negatiivisia potensseja, palautuu sekin potenssien integraalien laskemiseksi:

$$\begin{aligned}\int \Big(\frac{3}{x^2}+6x^2\Big)\,dx &= 3\int x^{-2}\,dx + 6\int x^2\,dx \\ &= 3\cdot\big(-x^{-1}\big) + 6\cdot\frac{1}{3}x^3 + C = -3x^{-1} + 2x^3 + C.\end{aligned}$$

Integroimisen tulos on viisasta tarkastaa derivoiden:

$$\frac{d}{dx}\big(-3x^{-1}+2x^3+C\big) = -3\cdot\big(-x^{-2}\big) + 2\cdot 3x^2 + 0 = 3x^{-2} + 6x^2.$$

1.13 Esimerkki. Joidenkin yhdistettyjen kuvausten integroiminen sujuu integraalin lineaarisuuden avulla:

$$\int \cos 3x\,dx = \int \frac{1}{3}3\cos 3x\,dx = \frac{1}{3}\int 3\cos 3x\,dx = \frac{1}{3}\sin 3x + C,$$

sillä $D\sin 3x = 3\cos 3x$.

1.3 Integrointi osittain

Olkoot $f, g: I \to \mathbb{R}$ derivoituvia. Tulon derivointikaavan mukaan

$$\frac{d}{dx}f(x)g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \text{ kaikilla } x \in I.$$

Tästä saadaan seuraava lause.

4. Nämä kuvaukset määritellään pisteittäin: $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ ja $(kf)(x) = kf(x)$.

1.14 Lause. (Osittaisintegrointikaava.) *Olkoot f ja $g\colon I \to \mathbb{R}$ derivoituvia sekä $f(x)g'(x)$ integroituva. Silloin $f'(x)g(x)$ on integroituva ja*

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.$$

Tämä on käyttökelpoinen kaava silloin, kun hankala integroitava kuvaus voidaan kirjoittaa tuloksi $f'g$ ja fg' on helppo integroida.

1.15 Esimerkkejä. 1. Lasketaan $\int \mathrm{e}^x\, x\,dx$. Valitaan $f'(x) = \mathrm{e}^x$ ja $g(x) = x$, jolloin kelpaa $f(x) = \mathrm{e}^x$ ja $g'(x) = 1$. Siten

$$\int \mathrm{e}^x\, x\,dx = \mathrm{e}^x\, x - \int \mathrm{e}^x \cdot 1\,dx = x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C.$$

2. Integroidaan osittain $\int \ln x\,dx$. Valitaan $f'(x) = 1$ ja $g(x) = \ln x$, jolloin kelpaa $f(x) = x$ ja $g'(x) = 1/x$. Siten

$$\int \ln x\,dx = \int 1 \cdot \ln x\,dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x + C.$$

Koska $D(x\ln x - x + C) = 1 \cdot \ln x + x \cdot 1/x - 1 = \ln x$ kaikilla $x > 0$ ja vain niillä, niin integraali on todella[5] se, mitä saatiin. Laajin mahdollinen väli $I =]0, \infty[$.

3. Integroidaan osittain $F(x) := \int \mathrm{e}^x \sin x\,dx$. Valitaan $f'(x) = \sin x$ ja $g(x) = \mathrm{e}^x$, jolloin kelpaa $f(x) = -\cos x$ ja $g'(x) = \mathrm{e}^x$. Siten

$$F(x) = -\mathrm{e}^x \cos x + \int \mathrm{e}^x \cos x\,dx.$$

Integroidaan osittain oikean puolen integraalia. Valitaan $f'(x) = \cos x$ ja $g(x) = \mathrm{e}^x$ jolloin kelpaa $f(x) = \sin x$ ja $g'(x) = \mathrm{e}^x$. Siten

$$F(x) = -\mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{e}^x \sin x - \int \mathrm{e}^x \sin x\,dx = \mathrm{e}^x (\sin x - \cos x) - F(x).$$

Näin saatiin *yhtälö*, josta ratkaistaan $F(x) = \mathrm{e}^x (\sin x - \cos x)/2 + C$.

4. Integroidaan osittain $\int x \arctan x\,dx$. Valitaan $f'(x) = x$ ja $g(x) = \arctan x$, jolloin kelpaa $f(x) = x^2/2$ ja $g'(x) = 1/(1 + x^2)$. Siten

$$F(x) := \int x \arctan x\,dx = \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \int \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

Koska $x^2/(1 + x^2) = (1 + x^2 - 1)/(1 + x^2) = 1 - 1/(1 + x^2)$, niin

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}\int 1\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}x^2 \arctan x$$
$$-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x + C = \frac{1}{2}(x^2+1)\arctan x - \frac{1}{2}x + C.$$

1.4 Integrointi sijoituksen avulla

Yhdistetyn kuvauksen derivointikaava eli ketjusääntö sanoo, että

$$\frac{d}{dx} f\big(g(x)\big) = f'\big(g(x)\big)g'(x). \tag{1.3}$$

Sovelletaan sitä potenssikuvaukseen x^n, $n \neq 1$, jonka derivaatta on nx^{n-1}, ja logaritmikuvaukseen $\ln x$, jonka derivaatta on $1/x$. Silloin saadaan lauseen 1.9 kaksi viimeistä integrointikaavaa.

5. Integroinnissa vaanivat laskuvirheet alati, ja siksi tuloksen tarkastaminen derivoiden on aina viisasta.

1.16 Esimerkkejä. 1. Sovelletaan lauseen 1.9 toiseksi viimeistä integrointikaavaa:

$$\int (x^3+2)^2 3x^2\,dx = \frac{1}{3}(x^3+2)^3 + C,\ C\in\mathbb{R},$$

sillä valitaan $n=2$ ja $f(x)=x^3+2$, jolloin $f'(x)=3x^2$.

2. Lauseen 1.9 viimeisellä integrointikaavalla lasketaan:

$$\int \frac{1}{2x-3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{2x-3}\,dx = \frac{1}{2}\ln|2x-3| + C,$$

missä $C\in R$ ja $I=]-\infty,3/2[$ tai $I=]3/2,\infty[$, sillä valitaan $f(x)=2x-3$, jolloin $f'(x)=2$.

Ketjusäännön (1.3) avulla saadaan seuraava lause.

1.17 Lause. Muuttujanvaihtokaava. *Olkoon $g\colon I\to\mathbb{R}$ derivoituva. Silloin g kuvaa välin I väliksi $J\subset\mathbb{R}$. Olkoon lisäksi $F\colon J\to\mathbb{R}$ kuvauksen $f\colon J\to\mathbb{R}$ antiderivaatta. Silloin $f\big(g(x)\big)g'(x)$ on integroituva ja kaikilla $x\in I$ pätee*

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = \int f(u)\,du \tag{1.4}$$

missä $u=g(x)$.

Todistus. Koska g on jatkuva, se kuvaa välin I joksikin väliksi[6] $J\subset\mathbb{R}$. Ketjusäännön (1.3) nojalla $F\big(g(x)\big)$ on derivoituva ja

$$\frac{d}{dx}F\big(g(x)\big) = F'\big(g(x)\big)g'(x) = f\big(g(x)\big)g'(x)$$

kaikilla $x\in I$. Siten $f\big(g(x)\big)g'(x)$ on integroituva ja sen antiderivaatta on $F\big(g(x)\big)$. Näin ollen kaavan (1.4) vasen puoli on $F\big(g(x)\big)+C$. Se on sama kuin $F(u)+C$, joka puolestaan on $\int f(u)\,du$. **m.o.t.**

1.18 Esimerkkejä. 1. Lasketaan muuttujanvaihtokaavalla $\int x^3\cos x^4\,dx$. Kuvaus $\cos x^4$ on yhdistetty kuvaus, joten asetetaan $f(x)=\cos x$ ja $g(x)=x^4$, jolloin $g'(x)=4x^3$ ja kelpaa $F(x)=\sin x$. Sijoitus $u=g(x)=x^4$ ja muuttujanvaihtokaava antavat

$$\begin{aligned}\int x^3\cos x^4\,dx &= \frac{1}{4}\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = \frac{1}{4}\int f(u)\,du = \frac{1}{4}\int \cos u\,du\\ &= \frac{1}{4}\sin u + C = \frac{1}{4}\sin x^4 + C \text{ kaikilla } x\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

2. Lasketaan $\int (x^2-1)^4 2x\,dx$ muuttujanvaihtokaavan avulla. Valitaan $f(x)=x^4$ ja $g(x)=x^2-1$, jolloin $g'(x)=2x$ ja kelpaa $F(x)=x^5/5$. Sijoitus $u=x^2-1$ antaa

$$\int (x^2-1)^4 2x\,dx = \int u^4\,du = \frac{1}{5}u^5 + C = \frac{1}{5}(x^2-1)^5 + C \text{ kaikilla } x\in\mathbb{R}.$$

3. Lasketaan vielä $\int x/(x^4+1)\,dx$. Nyt valitaan $f(x)=1/(1+x^2)$ ja $g(x)=x^2$, jolloin $g'(x)=2x$ ja kelpaa $F(x)=\arctan x$. Sijoitus $u=x^2$ antaa

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{1+x^4}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u^2}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\arctan u + C = \frac{1}{2}\arctan x^2 + C \text{ kaikilla } x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

6. Tämä seuraa Bolzanon lauseesta, joka sanoo, että jatkuva kuvaus saa kahden arvonsa välistä kaikki arvot.

Kaikissa näissä esimerkeissä vaihdettiin muuttujaa eli sijoitettiin $u = g(x)$ siten, että saatiin helppo integraali laskettavaksi. Kun se oli laskettu, palattiin alkuperäiseen muuttujaan x. Kuvauksesta g ei tarvitse olettaa bijektiivisyyttä. Muutenkin laskussa ja välin I määrittämisessä voi olla melko huoleton, jos laskun jälkeen tarkastetaan derivoiden, onko saatu tulos oikea. Samalla selviää myös väli I helposti.

1.19 Esimerkki. Katsotaan vielä edellisen esimerkin viimeistä kohtaa. Jos laskemalla tai arvaamalla on saatu integraalikandidaatiksi $\frac{1}{2}\arctan x^2 + C$, niin derivointi yhdessä antiderivaatan yksikäsitteisyystuloksen (lause 1.4) kanssa kertoo, että integraali on juuri $\frac{1}{2}\arctan x^2 + C$ ja sen laajin mahdollinen väli on $I = \mathbb{R}$, sillä

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{2}\arctan x^2 + C\Big) = \frac{x}{1+x^4} \quad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}.$$

Muuttujanvaihtokaavaa voidaan käyttää myös toiseen suuntaan: integraalin $\int f(u)\,du$ laskemiseksi se muokataan muotoon $\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx$ tekemällä sijoitukset $u = g(x)$ ja $du = g'(x)\,dx$. Jälkimmäinen integraali lasketaan ja sen jälkeen palataan muuttujaan u. Siinä tarvitaan sitä, että g on bijektio[7], jolloin $x = g^{-1}(u)$.

1.20 Esimerkkejä. 1. Lasketaan $\int \sqrt{1-u^2}\,dx$ välillä $I =]-1,1[$. Sijoitetaan $u = \sin x = g(x)$. Jotta kuvaus g olisi bijektio, on rajattava esimerkiksi $x \in]-\pi/2,\pi/2[$. Nyt $g'(x) = \cos x$ ja $x = g^{-1}(u) = \arcsin u$. Koska $1-u^2 = 1-\sin^2 x = \cos^2 x$, niin $\sqrt{1-u^2} = \cos x$, sillä $x \in]-\pi/2,\pi/2[$. Siten

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-u^2}\,du &= \int \cos x\cos x\,dx = \int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}\sin 2x) + C = \frac{1}{2}(x + \sin x\cos x) + C \\
&= \frac{1}{2}(x + \sin x\sqrt{1-\sin^2 x}) + C = \frac{1}{2}\arcsin u + \frac{1}{2}u\sqrt{1-u^2} + C,
\end{aligned}$$

sillä $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^x - 1$ ja $\sin 2x = 2\sin x\cos x$.

2. Lasketaan kuvauksen $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}, f(u) = 1(/1+\sqrt{u})$ integraali. Sijoitetaan $u = g(x) = x^2$, jolloin $g\colon [0,\infty[\to [0,\infty[$ on bijektio ja derivoituva, kun $x > 0$, $g'(x) = 2x$. Muuttujanvaihtokaavan mukaan

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+\sqrt{u}}\,du &= \int \frac{1}{1+x}2x\,dx = \int \frac{2+2x-2}{1+x}\,dx = \int \Big(2 - 2\frac{1}{1+x}\Big)\,dx \\
&= 2\int 1\,dx - 2\int \frac{1}{1+x}\,dx = 2x + 2\ln(1+x) + C \\
&= 2\sqrt{u} + 2\ln(1+\sqrt{u}) + C.
\end{aligned}$$

Tarkastetaan tulos derivoimalla:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{du}\Big(2\sqrt{u} - 2\ln(1+\sqrt{u}) + C\Big) &= 2\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{u}} - 2\frac{1}{1+\sqrt{u}}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{u}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{u}}\Big(1 - \frac{1}{1+\sqrt{u}}\Big) = \frac{1}{\sqrt{u}}\frac{1+\sqrt{u}-1}{1+\sqrt{u}} = \frac{1}{1+\sqrt{u}}
\end{aligned}$$

kaikilla $u > 0$. Pisteessä $u = 0$ saatu kuvaus ei ole derivoituva. Näin ollen integraali on olemassa vain välillä $]0,\infty[$.

3. Palataan kuvauksen $\sqrt{1-u^2}$ integraaliin välillä $[-1,1]$. Muuttujanvaihtokaavan soveltaminen sujuu ongelmitta, ja saadaan sama kuvaus ingraaliksi kuin yllä. Se ei kuitenkaan ole derivoituva pisteissä 1 ja -1, joten väliksi I kelpaa vain $]-1,1[$. Muuttujanvaihtolauseen kanssa ei ole ristiriitaa, sillä se olettaa, että f on integroituva.

---

7. Enempää ei tarvitse kuvauksesta g olettaa, jos oletetaan, että f on integroituva. Se on itseasiassa vahva oletus. Riemann-integraalin muuttujanvaihtolauseessa oletetaan, että g on jatkuvasti derivoituva, $g'(x) \neq 0$ ja f jatkuva, koska lauseen todistuksessa niitä tarvitaan ja toisaalta niistä seuraa kuvauksen f integroituvuus.

Muuttujanvaihtomenetelmän soveltamiseen palataan, kunhan on opittu integroimaan rationaalifunktioita eli kahden polynomin osamääriä.

1.5 Rationaalifunktioiden integrointi

1.21 Esimerkki. Lasketaan $\int (5x+3)/(x^2+2x-3)\,dx$. Integroitavan lausekkeen nimittäjän nollakohdat ovat[8] 1 ja -3, joten nimittäjä on ensimmäisen asteen polynomien $x-1$ ja $x+3$ tulo. Huomataan, että

$$\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+3}=\frac{2(x+3)+3(x-1)}{x^2+2x-3}=\frac{5x+3}{x^2+2x-3}.$$

Siten integraalin lineaarisuuden nojalla

$$\int \frac{5x+3}{x^2+2x-3}\,dx = 2\int \frac{1}{x-1}+3\int \frac{1}{x+3}\,dx = 2\ln|x-1|+3\ln|x+3|+C$$

kaikilla $x\in I$, missä $C\in R$ ja $I=]-\infty,-3[$, $I=]-3,1[$ tai $I=]1,\infty[$.

Jokainen rationaalifunktio $R=P/Q$, missä P ja Q ovat polynomeja, voidaan integroida alkeisfunktioiden avulla (niitä ovat polynomit, rationaalifunktiot, eksponenttifunktiot ja trigonometriset funktiot sekä näiden käänteisfunktiot). Tätä tulosta ei tällä kurssilla muotoilla lauseeksi eikä sitä todisteta, vaan annetaan ohje, miten rationaalifunktiot integroidaan. Menettelyn päävaiheet paljastuvat jo edellisestä esimerkistä: rationaalifunktio muokataan *osamurtolukujen* summaksi, joka integroidaan termeittäin. Yksityiskohtaisemin menettelyohje on seuraava.

1. Muokataan tarvittaessa funktiota R niin, että

$$R(x)=S(x)+\frac{K(x)}{Q(x)},$$

missä S, K ja Q ovat polynomeja siten, että K:n aste on pienempi kuin Q:n aste. Tämä onnistuu polynomien jakolaskulla. Polynomi S osataan integroida. Integraalin lineaarisuuden nojalla jää laskettavaksi rationaalifunktion K/Q. integraali.

2. Jaetaan nimittäjä Q mahdollisimman alhaista astetta oleviin reaalikertoimisiin tekijöihin. Voidaan osoittaa, että ne ovat vain muotoa $x-a$ tai x^2+bx+c, missä $a,b,c\in\mathbb{R}$ siten, että $b^2-4c<0$.

3. Muodostetaan osamurtoluvut. Jos nimittäjän tekijä on $(x-a)^k$, $k\in\mathbb{N}$ eli a on nimittäjän k-kertainen reaalinen nollakohta, niin vastaavat osamurtoluvut ovat

$$\frac{A_1}{x-a},\ \frac{A_2}{(x-a)^2},\dots,\ \frac{A_k}{(x-a)^k},$$

missä $A_1,\dots,A_k\in\mathbb{R}$. Jos nimittäjän tekijä on $(x^2+bx+c)^k$, $k\in\mathbb{N}$, eli nimittäjällä on k-kertaiset kompleksilukujuuret, niin vastaavat osamurtoluvut ovat

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c},\ \frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2},\ \dots\ \frac{B_kx+C_k}{(x^2+bx+c)^k},$$

missä $B_1,\dots,B_k,C_1,\dots,C_k\in\mathbb{R}$. Rationaalifunktio on osamurtolukujensa summa. Kertoimet $A_1,\dots,C_k$ määrätään laskemalla osamurtoluvut yhteen.

4. Integroidaan osamurtoluvut.

1.22 Esimerkkejä. 1. Lasketaan $\int 1/(x^2-1)\,dx$, kun $I=]-\infty,-1[$, $I=]-1,1[$ tai $I=]1,\infty[$. Integroitavan rationaalifunktion nimittäjän aste on kaksi ja osoittajan yksi, joten voidaan aloittaa toisesta vaiheesta. Nimittäjällä on

8. Muista toisen asteen yhtälön ratkaisukaava.

kaksi reaalista yksinkertaista nollakohtaa (1 ja -1), joten se on $(x+1)(x-1)$, ja osamurtoluvut ovat $A_1/(x+1)$ ja $A_2/(x-1)$. Nyt

$$\frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x-1} = \frac{A_1(x-1) + A_2(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{(A_1 + A_2)x + A_2 - A_1}{x^2 - 1}.$$

Tämän pitää olla sama kuin $1/(x^2-1)$ kaikilla $x \in I$. Se toteutuu täsmälleen silloin kun osoittajissa kullakin x:n potenssilla on sama kerroin eli

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 0 \\ A_2 - A_1 = 1 \end{cases} \text{eli} \begin{cases} A_1 = -\frac{1}{2} \\ A_2 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Siten

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2-1}\,dx &= \int \left(\frac{-1/2}{x+1} + \frac{1/2}{x-1}\right) dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C. \end{aligned}$$

2. Lasketaan

$$\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}\,dx.$$

Osoittajan aste on suurempi kuin nimittäjän, joten jaetaan jakokulmassa:

$$\frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1} = x + 1 + \frac{2}{x^3-x^2+x-1}.$$

Kokeilemalla huomataan, että $x = 1$ on nimittäjän nollakohta. Jakolaskulla saadaan, että nimittäjä $x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2+1)$. Siten pätee

$$\frac{2}{x^3-x^2+x-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{(A+B)x^2 + (-B+C)x + A - C}{x^3-x^2+x-1},$$

missä jälkimmäinen yhtäsuuruus seuraa samannimisiksi laventamisesta. Näin kertoimet A, B ja C toteuttavat

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -B + C = 0 \\ A - C = 2 \end{cases} \text{eli} \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = -1. \end{cases}$$

Siten

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}\,dx &= \int (x+1)\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x-1| - \int \left(\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \arctan x + C, \end{aligned}$$

kaikilla $x \in I$, missä $C \in \mathbb{R}$ ja $I =]-\infty, 1[$ tai $I =]1, \infty[$.

3. Lasketaan vielä integraali

$$\int \frac{2x^3+3}{(x^2+1)^2}\,dx.$$

Integroitavan osoittajan aste on pienempi kuin nimittäjän ja nimittäjällä ei ole reaalisia nollakohtia, joten integroitavan osamurtokehitelmä on

$$\begin{aligned} \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2} &= \frac{B_1x + C_1}{x^2+1} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{B_1x^3 + C_1x^2 + (B_1 + B_2)x + C_1 + C_2}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

Ensimmäinen yhtäsuuruus pätee täsmälleen silloin kun

$$\begin{cases} B_1 = 0 \\ C_1 = 2 \\ B_1 + B_2 = 0 \\ C_1 + C_2 = 3 \end{cases} \quad \text{eli} \quad \begin{cases} B_1 = 0 \\ B_2 = 0 \\ C_1 = 2 \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Siten

$$\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{2}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx,$$

missä jälkimmäinen integraali on

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = \arctan x + \int -\frac{2x}{(x^2+1)^2}\frac{x}{2}\,dx.$$

sillä $1 = x^2 + 1 - x^2$. Tämä integraali integroidaan osittain valitsemalla $f'(x) = -2x/(x^2+1)^2$ ja $g(x) = x/2$, jolloin kelpaa $f(x) = 1/(x^2+1)$ ja $g'(x) = 1/2$. Se on siis

$$\frac{x}{2}\frac{1}{x^2+1} - \int \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2}\arctan x + C.$$

Näin saadaan lopulta

$$\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{5}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + C \text{ kaikilla } x \in I,$$

missä $C \in \mathbb{R}$ ja $I = \mathbb{R}$. Tarkastus derivoiden vahvistaa laskun tuloksen oikeaksi.

1.6 Trigonometristen kuvausten integrointi

Trigonometrisiä kuvauksia sisältävien lausekkeiden integroimiseen ei ole yleisiä ohjeita. Seuraavat keinot voivat kuitenkin auttaa.

1. Derivaatoista johdetut peruskaavat (ks. lause 1.9).
2. Integroitavan kuvauksen muokkaaminen trigonometristen muunnoskaavojen avulla.
3. Integrointi osittain.
4. Integrointi sijoituksen avulla.
   (a) Jos integroitava kuvaus on rationaalifunktio R tangentista eli on laskettava $\int R(\tan x)\,dx$, niin sijoitus $t = \tan x$ vie laskemaan rationaalifunktion integraalia, joka ainakin periaatteessa osataan aina laskea.
   (b) Jos integroitava kuvaus on rationaalifunktio R sinistä ja kosinista eli on laskettava $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, niin sijoitus $t = \tan\frac{x}{2}$ vie rationaalifunktion laskemiseen.

Käydään näistä viimeinen tarkemmin läpi. Sijoitus $t = \tan\frac{x}{2}$ antaa

$$\frac{1}{1+t^2} = \cos^2\frac{x}{2} \quad \text{ja} \quad \frac{t^2}{1+t^2} = \sin^2\frac{x}{2},$$

joten

$$\begin{aligned} \sin x &= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x &= \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Rajoitetaan $-\pi < x < \pi$, jolloin $x = g(t)$, missä $g\colon \mathbb{R} \to]-\pi,\pi[$, $g(t) = 2\arctan t$ on derivoituva bijektio ja $g'(t) = 2/(1+t^2)$. Muuttujavaihtokaavan mukaan

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\Big(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\Big)\frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

Tämä on rationaalifunktion integraali, joka osataan laskea. Koska g on bijektio, voidaan palata muuttujaan x.

1.23 Esimerkkejä. 1. Lasketaan $\int 1/(1+\sin x+\cos x)\,dx$. Integroitava on rationaalilauseke sinistä ja kosinista, joten tehdään sijoitus $t=\tan\frac{x}{2}$. Edellä olevan laskun perusteella sijoitus antaa

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\sin x-\cos x}\,dx &= \int \Big(1+\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}\Big)^{-1}\frac{2}{1+t^2}\,dt \\ &= \int \frac{1+t^2}{1+t^2+2t-1+t^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1}{t(1+t)}\,dt.\end{aligned}$$

Käytetään osamurtokehitelmää $1/\big(t(1+t)\big)=1/t-1/(t+1)$, joten

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\sin x-\cos x}\,dx &= \int \frac{1}{t}\,dt-\int\frac{1}{t+1}\,dt = \ln|t|-\ln|t+1|+C \\ &= \ln\Big|\frac{t}{t+1}\Big|+C = \ln\Big|\frac{\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}\Big|+C.\end{aligned}$$

Derivoimalla selviää väli I ja laskettiinko oikein.

2. Lasketaan vielä trigonometristen muunnoskaavojen avulla seuraava sinin parittoman positiivisen potenssin integraali:

$$\begin{aligned}\int \sin^7 x\,dx &= \int \big(\sin^2 x\big)^3\sin x\,dx = \int \big(1-\cos^2 x\big)^3\sin x\,dx \\ &= \int \big(1-3\cos^2 x+3\sin^4 x-\cos^6 x\big)\sin x\,dx \\ &= -\cos x+\cos^3 x-\frac{3}{5}\cos^5 x+\frac{1}{7}\cos^7 x+C.\end{aligned}$$

1.7 Muiden funktiotyyppien integroinnista

Sinin ja kosinin rationaalilausekkeiden tapaan joukko muiden funktiotyyppien integraaleja palautuu sopivalla sijoituksella rationaalifunktion integraaliksi. Olkoon R rationaalifunktio.

A. Hyperbolisen sinin ja kosinin rationaalilausekkeen integraali muuttuu sijoituksella $t=\tanh\frac{x}{2}$ rationaalifunktion integraaliksi:

$$\int R(\sinh x,\cosh x)\,dx = \int R\Big(\frac{2t}{1-t^2},\frac{1+t^2}{1-t^2}\Big)\frac{2}{1-t^2}\,dt.$$

B. Sijoitus $t=\sqrt[n]{(ax+b)/(cx+d)}$, $n\in\mathbb{N}$, palauttaa integraalin

$$\int R\Bigg(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\Bigg)\,dx$$

rationaalifunktion integraaliksi.

C. Sijoituksella $x=a\sin t$, $a\in\mathbb{R}$, $-\pi/2<t<\pi/2$, saadaan

$$\int R\big(x,\sqrt{a^2-x^2}\,\big)\,dx = \int R(a\sin t,|a|\cos t)a\cos t\,dt,$$

joka on sinin ja kosinin rationaalilausekkeen integraali. Se osataan laskea. Sama onnistuu myös sijoituksella $x/a=(1-t^2)/(1+t^2)$.

D. Sijoituksella $x=a\sinh t$, $a\in\mathbb{R}$, saadaan

$$\int R\big(x,\sqrt{x^2+a^2}\,\big)\,dx = \int R(a\sinh t,|a|\cosh t)a\cosh t\,dt,$$

joka on hyperbolisen sinin ja kosinin rationaalilausekkeen integraali. Se osataan laskea. Tämä palautus onnistuu myös sijoituksella $t=x+\sqrt{x^2+1}$.

E. Sijoituksella $x = a\cosh t$, $a \in \mathbb{R}$, $t > 0$, saadaan

$$\int R\big(x, \sqrt{x^2 - a^2}\big)\, dx = \int R(a\cosh t, |a| \sinh t) a \sinh t\, dt,$$

mikä hyperbolisen sinin ja kosinin rationaalilausekkeen integraali. Se osataan laskea.

F. Olkoot $a, b, c \in \mathbb{R}$ siten, että $a \neq 0$. Seuraava integraali palautuu johonkin tapauksista C, D tai E täydentämällä neliöksi lauseke neliöjuuren alla ja muuttujanvaihdolla $y = x + b/a$:

$$\int R\big(x, \sqrt{ax^2 + 2bx + c}\,\big)\, dx.$$

1.24 Esimerkkejä. 1. Tapauksesta C on esimerkki

$$\int \frac{x}{4 - x^2 + \sqrt{4 - x^2}}\, dx, \; I =]-2, 2[.$$

Tehdään sijoitus $x = 2\sin t$, $-\pi/2 < t < \pi/2$, jolloin $x(t)$ on derivoituva bijektio, $x'(t) = 2\cos t$ ja $\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - 4\sin^2 t} = 2\cos t$. Siten

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{4 - x^2 + \sqrt{4 - x^2}}\, dx &= \int \frac{4\sin t \cos t}{4\cos^2 t + 2\cos t}\, dt = \int \frac{\sin t}{\cos t + \frac{1}{2}}\, dt \\
&= -\ln\Big|\cos t + \frac{1}{2}\Big| + C = -\ln\Big|\frac{1}{2}\big(\sqrt{4 - x^2} + 1\big)\Big| + C' \\
&= -\ln\big(\sqrt{4 - x^2} + 1\big) + C.
\end{aligned}$$

2. Tapauksesta B lasketaan esimerkiksi

$$\int \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{1 + x}}\, dx, \; I =]-1, \infty[.$$

Tehdään sijoitus $t = \sqrt{1 + x}$, jolloin $x = x(t) = t^2 - 1$ on derivoituva bijektio (kunhan $t > 0$) ja $x'(t) = 2t$. Siten

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{1 + x}}\, dx &= \int \frac{(t^2 - 1)^2 + 2(t^2 - 1)}{t}\, 2t\, dt = 2\int (t^4 - 1)\, dt \\
&= \frac{2}{5}t^5 - 2t + C = \frac{2}{5}(1 + x)^{5/2} - 2(1 + x)^{1/2} + C.
\end{aligned}$$

3. Lasketaan lopuksi tapauksesta F esimerkiksi

$$\int \frac{1}{\sqrt{6 + x - x^2}}\, dx.$$

Täydennetään juuren allla oleva lauseke neliöksi: $6 + x - x^2 = -(x - 1/2)^2 + 1/4 + 6 = -(x - 1/2)^2 + 25/4$. Sijoitetaan $t = x - 1/2$, jolloin $x = x(t) = t + 1/2$ on derivoituva bijektio $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $x'(t) = 1$. Siten

$$\int \frac{1}{\sqrt{6 + x - x^2}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{25/4 - t^2}}\, dt.$$

Tämä on tapaus C. Integraali voidaan laskea sijoituksella $2t = 5\sin\tau$, mutta se menee suoraan sinin käänteisfunktion derivointikaavalla:

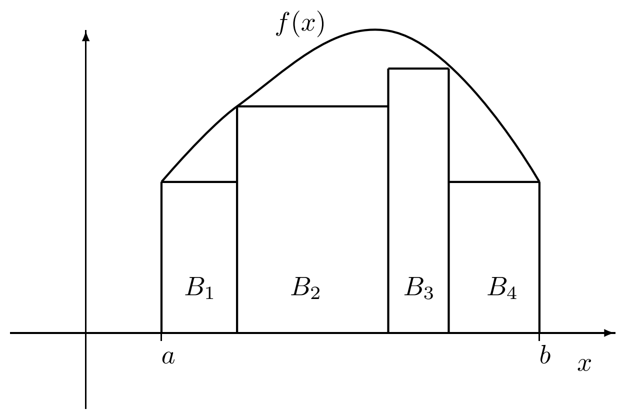
$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{6 + x - x^2}}\, dx &= \int \frac{2}{5} \frac{1}{\sqrt{1 - (2t/5)^2}}\, dt = \arcsin\frac{2t}{5} + C \\
&= \arcsin\frac{2t}{5} + C = \arcsin\frac{2x - 1}{5} + C.
\end{aligned}$$

Luku 2

Riemann-integraali

Tässä luvussa määritellään *rajoitetun* kuvauksen integraali yli *rajoitetun* välin eli yli välin $[a, b]$, missä $a, b \in \mathbb{R}$ ja $a < b$.

Kuvauksen antiderivaatan hakemisen lisäksi toinen integraalilaskennan pääongelma on tasokuvioiden pinta-alan määrittäminen. Kuvauksen $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ kuvaaja eli käyrä $y = f(x)$ sekä suorat $x = a$, $x = b$ ja $y = 0$ rajaavat pinta-alan A. Se määriteellään kuvauksen f (määrätyksi) integraaliksi yli välin $[a, b]$. Määritelmä perustuu tuon pinta-alan A arvioimiseen alhaalta ja ylhäältä suorakaiteilla. Kuvassa 2.1 kyseistä pinta-alaa arvioi alhaalta neljän suorakaiteen pinta-alojen summa: $A \geq B_1 + B_2 + B_3 + B_4$. Vastaavasti pinta-alaa arvoidaan ylhäältä suorakaiteilla, joiden laki on kuvaajan yläpuolella. Suorakaiteita tihentämällä arviot tarkentuvat ja lähestyvät kohti lukua A.



Kuva 2.1: Pinta-alan arviointi alhaalta.

2.1 Porrasfunktiot

2.1 Määritelmä. *Luvut $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ muodostavat välin $I = [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, jaon $(x_0, x_1, \ldots x_n)$, jos*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Kuvaus $f\colon I \to \mathbb{R}$ on porrasfunktio, jos on olemassa välin I jako $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ ja luvut $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ siten, että

$$f(x) = a_j \textit{ kaikilla } x \in]x_{j-1}, x_j[\quad \textit{ja} \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

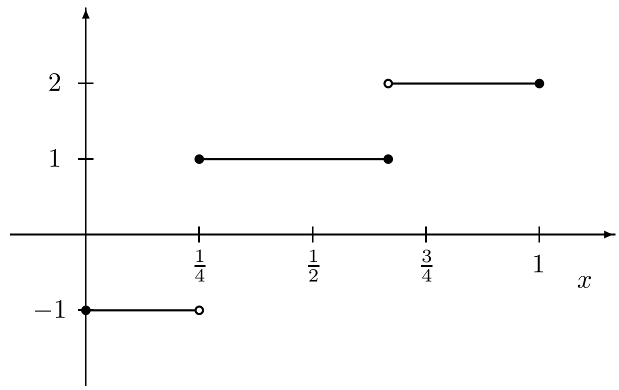
Huomaa, että porrasfunktio on kunkin jakovälin sisällä vakio. Jakopisteissä se saa olla mitä tahansa.

2.2 Esimerkkejä. 1. Olkoon $I = [0,1]$. Kuvaus $f : I \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{jos } 0 \leq x < 1/4, \\ 1, & \text{jos } 1/4 \leq x \leq 2/3, \\ 2, & \text{jos } 2/3 < x \leq 1, \end{cases}$$

on porrasfunktio (ks. kuva 2.2). Sen jako on $(0, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, 1)$. Kaikki muutkin välin $[0,1]$ jaot ovat porraskuvauksen f jakoja, kunhan ne sisältävät pisteet $0, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, 1$.

2. Olkoon $\tilde{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$ rajoitettu eli on olemassa $M > 0$ siten, että $|\tilde{f}(x)| \leq M$ kaikilla $x \in [a,b]$. Silloin vakiokuvaukset $g(x) = -M$ ja $h(x) = M$ ovat porraskuvauksia ja $g \leq \tilde{f} \leq h$.



Kuva 2.2: Porrasfunktio.

2.3 Määritelmä. *Olkoon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ porrasfunktio, jonka jako on $(x_0, \ldots, x_n)$ ja arvot ovat $a_j = f(x)$ kaikilla $x \in I_j :=]x_{j-1}, x_j[$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Porrasfunktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integraali yli välin $[a,b]$ on*

$$\int_a^b f := \sum_{j=1}^{n} a_j l(I_j),$$

missä $l(I_j) = x_j - x_{j-1}$ on jakovälin I_j pituus.

2.4 Huomautus. 1. Jos porrasfunktio $f \geq 0$, niin sen integraali on vastaavien suorakaiteiden kokonaispinta-ala.

2. Kuvauksen f arvot jakopisteissä eivät vaikuta integraaliin.
3. Integraali ei muutu, vaikka porrasfunktion jakoa tihennetään.

2.5 Esimerkki. Olkoon $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sama porrasfunktio kuin esimerkissä 2.2.1. Silloin

$$\int_0^1 f = -1 \cdot (\frac{1}{4} - 0) + \mathbf{1} \cdot (\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}) + 2 \cdot (1 - \frac{2}{3}) = \frac{5}{6}.$$

Kuvaus f on porrasfunktio myös jakoa $(0, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, 1)$ tiheämmän jaon suhteen. Esimerkiksi jaolle $(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1)$

$$\int_0^1 f = -1 \cdot (\frac{1}{4} - 0) + \mathbf{1} \cdot (\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}) + \mathbf{1} \cdot (\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}) + 2 \cdot (1 - \frac{2}{3}) = \frac{5}{6}.$$

Integraalin arvo ei muuttunut. Syykin siihen paljastui laskusta[1].

---

1. Ennen muinoin romaanit kiersivät hevoskärryillä kerjuulla pitkin pitäjiä. Mustalaisrouva maanitteli talon emäntää antamaan kokonaisen leivän: "Hai, hyvä emäntä, ei teidän tarvitse koko leipää antaa. Leikatkaa se kahtia ja antakaa molemmat puolet."

2.6 Lause. *Olkoot $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ porrasfunktioita ja $\lambda \in \mathbb{R}$. Tällöin $f+g$ ja λf ovat porrasfunktioita. Lisäksi on voimassa:*

$$\text{Jos } f \le g, \text{ niin } \int_a^b f \le \int_a^b g. \tag{2.1}$$

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g. \tag{2.2}$$

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f. \tag{2.3}$$

$$\text{Jos } a < c < b, \text{ niin } \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \tag{2.4}$$

Todistus. Voidaan olettaa, että porrasfunktioilla on sama jako $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ (jos ei ole, niin tihennetään kummankin jako niiden yhdisteeksi). Olkoot $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ kuvauksen f arvot ja $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ kuvauksen g arvot. Koska $f \le g$, niin $a_j \le b_j$ kaikilla $j = 1, 2, \ldots, n$. Siten

$$\int_a^b f = \sum_{j=1}^n a_j l(I_j) \le \sum_{j=1}^n b_j l(I_j) = \int_a^b g.$$

Toinen kohta pätee, sillä

$$\int_a^b (f+g) = \sum_{j=1}^n (a_j + b_j) l(I_j) = \sum_{j=1}^n a_j l(I_j) + \sum_{j=1}^n b_j l(I_j) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Kolmas kohta pätee, sillä

$$\int_a^b \lambda f = \sum_{j=1}^n \lambda a_j l(I_j) = \lambda \sum_{j=1}^n a_j l(I_j) = \lambda \int_a^b f.$$

Viimeisen kohdan todistamiseksi täydennetään tarvittaessa jakoa siten, että $x_k = c$. Integraalien arvot eivät siitä muutu, ja pätee

$$\int_a^b f = \sum_{j=1}^n a_j l(I_j) = \sum_{j=1}^k a_j l(I_j) + \sum_{j=k+1}^n a_j l(I_j) = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

m.o.t.

2.2 Riemann-integraali ja integroituvuus

Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ja $f \ge 0$. Jos $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on porraskuvaus ja $0 \le g \le f$, niin porraskuvauksen g kuvaajaa vastaavan suorakaiteiston pinta-ala $\int_a^b g$ arvoi alhaalta kuvauksen f kuvaajan ja suorien $y = 0$, $x = a$ ja $x = b$ rajaaman tasokuvion pinta-alaa. Suorakaiteiden kaventuminen rajatta saadaan esitettyä seuraavasti supremumin ja infimumin avulla.

2.7 Määritelmä. *Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ rajoitettu*[2]*. Kuvauksen f alaintegraali yli välin $[a,b]$ on*

$$\text{ala} \int_a^b f \colon = \sup \left\{ \int_a^b g \;\middle|\; g\colon [a,b] \to \mathbb{R} \textit{ on porrasfunktio ja } g \le f \right\}$$

ja kuvauksen f yläintegraali yli välin $[a,b]$ on

$$\text{ylä} \int_a^b f \colon = \inf \left\{ \int_a^b h \;\middle|\; h\colon [a,b] \to \mathbb{R} \textit{ on porrasfunktio ja } h \ge f \right\}.$$

2. Toisin sanoen on olemassa $M > 0$ siten, että $|f(x)| \le M$ kaikilla $x \in [a,b]$.

2.2.1 Kertausta supremumista ja infimumista

Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ epätyhjä. Reaaliluku M on joukon A *yläraja*, jos $a \leq M$ kaikilla $a \in A$. Reaaliluku G on joukon A *pienin yläraja* eli *supremum* eli $G = \sup A$, jos se on joukon A yläraja ja $G \leq M$ jokaisella joukon A ylärajalla M. Samoin määritellään joukon A *alaraja* m ja *suurin* alaraja eli *infimum* eli $\inf A$.

Palautetaan mieleen joitakin lauseita.

2.8 Lause. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ epätyhjä ja $m, M \in \mathbb{R}$.*

(a) Luku $M = \sup A$, jos ja vain jos M on joukon A yläraja ja jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa $a_\epsilon \in A$ siten, että $a_\epsilon > M - \epsilon$.

(b) Luku $m = \inf A$, jos ja vain jos m on joukon A alaraja ja jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa $a_\epsilon \in A$ siten, että $a_\epsilon < m + \epsilon$.

2.9 Seuraus. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ epätyhjä, $m \in \mathbb{R}$ sen alaraja ja $M \in \mathbb{R}$ yläraja.*

(a) Jos jollekin jonolle (y_n) joukon A alkioita pätee $\lim_{n\to\infty} y_n = M$, niin $M = \sup A$.

(b) Jos jollekin jonolle (z_n) joukon A alkioita pätee $\lim_{n\to\infty} z_n = m$, niin $m = \inf A$.

2.10 Esimerkkejä.

1. Olkoon $A =]0, 1]$. Nyt $\sup A = 1$ ja $\inf A = 0$.
2. Olkoon $B = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Nyt $\sup B = \max B = 1$. Toisaalta lauseen 2.8 mukaan $\inf B = 0$, sillä $1/n \geq 0$ ja jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa $1/n \in B$ siten, että $1/n < 0 + \epsilon$. Seurauksen 2.9 avulla tämä saadaan, kun valitaan $y_n = \frac{1}{n}$.

2.11 Lause. (Täydellisyysaksiooma[3]). *Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ epätyhjä ja ylhäältä rajoitettu[4]. Tällöin sillä on äärellinen supremum.*

2.12 Lause. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ epätyhjä ja alhaalta rajoitettu[5]. Tällöin sillä on äärellinen infimum.*

2.2.2 Riemann-integraalin määritelmä

2.13 Huomautus.

1. Koska kuvaus f on rajoitettu, niin määritelmän 2.7 joukot ovat epätyhjiä (ks. esimerkki 2.2.2). Lisäksi alaintegraalin määritelmän joukko on ylhäältä rajoitettu ja yläintegraalin määritelmän joukko on alhaalta rajoitettu. Siten lauseiden 2.11 ja 2.12 nojalla sekä ala- että yläintegraali ovat äärelllisinä olemassa.
2. Seurauksen 2.9 mukaan on olemassa ainakin yksi jono kuvausta f alhaalta arvoivia porrasfunktioita niin, että niiden integraalien raja-arvo on f:n alaintegraali. Samoin on olemassa ainakin yksi jono kuvausta f ylhäältä arvioivia porrasfunktioita siten, että niiden integraalien raja-arvo on f:n yläintegraali.
3. Lauseen 2.6 mukaan aina $\text{ala}\int_a^b f \leq \text{ylä}\int_a^b f$, sillä
$$\text{ala}\int_a^b f = \sup\left\{ \int_a^b g \,\middle|\, g\colon [a,b] \to \mathbb{R} \text{ on porrasfunktio ja } g \leq f \right\} \leq \int_a^b h$$
jokaisella porraskuvauksella $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ siten, että $f \leq h$.
4. Porrasfunktioille pätee aina $\text{ala}\int_a^b f = \text{ylä}\int_a^b f$.

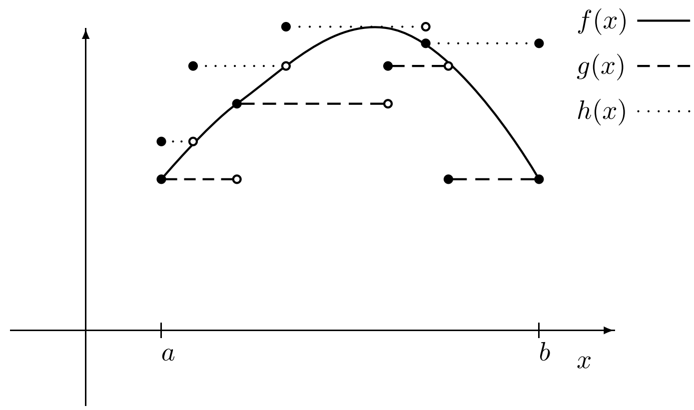
2.14 Määritelmä. *Rajoitettu kuvaus $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on Riemann-integroituva[6], jos*
$$\text{ala}\int_a^b f = \text{ylä}\int_a^b f.$$

---

3. Tämä on aksiooma tai lause riippuen siitä, miten reaalikujen teoria esitetään.
4. Eli sillä on yläraja.
5. Eli sillä on alaraja.
6. Mikäli sekaannuksen vaaraa ei ole, jätetään sana Riemann mainitsematta. Integraalin käsitteitä on useita.Tärkeimmät niistä ovat Riemnann-integraali ja Lebesguen integraali. Jälkimmäiseen tutustutaan mitta- ja integraaliteorian kurssilla. Tarpeeksi säännöllisen kuvauksen tapauksessa Riemann- ja Lebesguen integraali ovat yhtä suuret.

Tällöin kuvauksen f Riemann-integraali (eli määrätty integraali) yli välin $[a,b]$ on

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx := \text{ala}\int_a^b f = \text{ylä}\int_a^b f.$$



Kuva 2.3: Riemann-integraalin määritelmä

Huomaa, että ilmaisussa $\int_a^b f(x)\,dx$ muuttuja x on ns. sidottu muuttuja. Se voidaan vaihtaa toiseksi kirjaimeksi ilman, että integraali siitä muuttuu. Tästä ominaisuudesta tulee Riemann-integraalin nimitys "määrätty integraali".

2.15 Esimerkkejä. 1. Huomautuksen 2.13.4 perusteella jokainen porrasfunktio $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ on integroituva ja sen Riemann-integraali on sama kuin porrasfunktion integraali. Molempia sopii siten merkitä samalla merkinnällä $\int_a^b f$.

2. Lasketaan kuvauksen $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$ Riemann-integraali yli välin $[0,1]$. Valitaan välin $[0,1]$ tasavälinen jako $P=(0,1/n,\dots,(n-1)/n,1)$, missä $n\in\mathbb{N}$. Määritellään porraskuvaukset $h,g\colon[0,1]\to\mathbb{R}$,

$$h(x)=\begin{cases}\frac{k}{n}, & \text{jos } x\in]\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}[,\ k=1,2,\dots,n,\\ 1, & \text{jos } x \text{ on jakopiste,}\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}\frac{k-1}{n}, & \text{jos } x\in]\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}[,\ k=1,2,\dots,n,\\ 0, & \text{jos } x \text{ on jakopiste.}\end{cases}$$

Tällöin $g\le f\le h$. Siten

$$\begin{aligned}\text{ala}\int_0^1 f &= \sup\Big\{\int_0^1\tilde g \,\Big|\, \tilde g\colon[0,1]\to\mathbb{R} \text{ on porrasfunktio ja } \tilde g\le f\Big\}\\ &\ge \int_0^1 g = 0\cdot\frac1n+\frac1n\cdot\frac1n+\cdots+\frac{n-1}{n}\cdot\frac1n\\ &= \frac{1}{n^2}\big(1+2+\cdots+(n-1)\big)=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{(n-1)n}{2}=\frac{n-1}{2n}=\frac12-\frac{1}{2n}.\end{aligned}$$

Samoin saadaan

$$\begin{aligned}\text{ylä}\int_0^1 f &= \inf\Big\{\int_0^1\tilde h \,\Big|\, \tilde h\colon[0,1]\to\mathbb{R} \text{ on porrasunktio ja } \tilde h\ge f\Big\}\\ &\le \int_0^1 h = \frac1n\cdot\frac1n+\frac2n\cdot\frac1n+\cdots+\frac nn\cdot\frac1n=\frac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n)\\ &= \frac{1}{n^2}\frac{(n+1)n}{2}=\frac12+\frac{1}{2n}.\end{aligned}$$

Koska ala-integraali on aina pienempi tai yhtäsuuri kuin yläintegraali, niin

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2n} \leq \text{ala}\int_0^1 f \leq \text{ylä}\int_0^1 f \leq \frac{1}{2}+\frac{1}{2n}.$$

Tämä pätee jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Annetaan $n \to \infty$, jolloin saadaan

$$\frac{1}{2} = \text{ala}\int_0^1 f = \text{ylä}\int_0^1 f.$$

Siten kuvaus f on Riemann-integroituva ja $\int_0^1 f = \frac{1}{2}$.

3. Kaikki rajoitetut kuvaukset eivät ole Riemann-integroituvia. Olkoon

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ 0, & \text{jos } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Kahden reaaliluvun välissä on aina rationaaliluku. Olkoon $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ porrasfunktio siten, että $h \geq f$. Silloin $h(x) \geq 1$ kaikilla $x \in [0,1]$. Siten yläintegraalin määritelmän ja lauseen 2.6 ensimmäisen kohdan nojalla

$$\begin{aligned} \text{ylä}\int_0^1 f &= \inf\left\{ \int_0^1 h \,\middle|\, h\colon [0,1] \to \mathbb{R} \text{ on porrasfunktio ja } h \geq f \right\} \\ &\geq \inf\left\{ \int_0^1 1 \,\middle|\, h\colon [0,1] \to \mathbb{R} \text{ on porrasfunktio ja } \tilde{h} \geq f \right\} = \int_0^1 1 = 1. \end{aligned}$$

Toisaalta vakiokuvaus 1 on porrasfunktio ja $f \leq 1$, joten

$$\text{ylä}\int_0^1 f \leq \int_0^1 1 = 1.$$

Näin ylä $\int_0^1 f = 1$. Samoin päätellään ala $\int_0^1 f = 0$ huomiosta, että kahden reaaliluvun välissä on aina irrationaaliluku. Siten ylä- ja alaintegraali eivät ole yhtäsuuria, joten f ei ole Riemann-integroituva.

2.3 Riemannin ehto

Supremumin ja infimumin ϵ-luonnehdinta (lause 2.8) johtaa vastaavaan integroituvuuskriteeriin:

2.16 Lause. *(Riemannin ehto.) Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ rajoitettu. Silloin f on integroituva, jos ja vain jos jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa porrasfunktiot $g, h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ siten, että*

$$g \leq f \leq h \quad \textit{ja} \quad \int_a^b h - \int_a^b g < \epsilon.$$

Huomaa, että erotus $\int_a^b h - \int_a^b g = \int_a^b (h-g)$ on kuvauksen f kuvaajan ja suorien $x = a$, $x = b$, $y = 0$ rajaamaa pinta-alaa ylhäältä ja alhaalta arvioivien suorakaiteiden pinta-alojen erotus eli porraskuvausten h ja f kuvaajien väliin jäävä pinta-ala, ks. kuva 2.3.

Todistus. Riemannin ehdon välttämättömyys. Olkoon f integroituva. Tällöin $\int_a^b f =$ ala $\int_a^b f =$ ylä $\int_a^b f$. Yläintegraalin määritelmän ja lauseen 2.8 mukaan on olemassa porrasfunktio $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ siten, että $h \geq f$ ja

$$\int_a^b h < \text{ylä}\int_a^b f + \frac{\epsilon}{2} = \int_a^b f + \frac{\epsilon}{2}.$$

Samoin alaintegraalin määritelmän ja lauseen 2.8 nojalla on olemassa porrasfunktio $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ siten, että $g \leq f$ ja

$$\int_a^b g > \text{ala}\int_a^b g - \frac{\epsilon}{2} = \int_a^b f - \frac{\epsilon}{2}.$$

Nyt Riemannin ehto toteutuu:

$$\int_a^b h - \int_a^b g < \int_a^b f + \frac{\epsilon}{2} - \Big(\int_a^b f - \frac{\epsilon}{2}\Big) = \epsilon.$$

Riemannin ehdon riittävyys. Riittää näyttää, että ylä $\int_a^b f \leq$ ala $\int_a^b f$, koska aina pätee ylä $\int_a^b f \geq$ ala $\int_a^b f$. Olkoon $\epsilon > 0$ mielivaltainen ja $g, h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ porrasfunktioita siten, että

$$g \leq f \leq h \quad \text{ja} \quad \int_a^b h - \int_a^b g < \epsilon.$$

Koska joukon infimum on joukon alaraja, niin yläintegraalin määritelmän nojalla

$$\text{ylä}\int_a^b f \leq \int_a^b h < \int_a^b g + \epsilon \leq \text{ala}\int_a^b f + \epsilon,$$

sillä joukon supremum on aina joukon yläraja (ks. alaintegraalin määritelmä). Koska $\epsilon > 0$ on mielivaltainen, saadaan[7] ylä $\int_a^b f \leq$ ala $\int_a^b f$. **m.o.t.**

2.17 Esimerkki.
Esimerkin 2.15.2 kuvauksen integroituvuus saadaan helpohkosti Riemannin ehdosta. Olkoon $\epsilon > 0$. Valitaan $n \in \mathbb{N}$ siten, että $n > 1/\epsilon$. Valitaan edelleen porraskuvaukset f ja g kuten esimerkissä 2.15. Koska lauseen 2.6 nojalla porrasfunktioiden integraali on lineaarinen, niin

$$\int_0^1 h - \int_0^1 g = \int_0^1 (h-g) = \underbrace{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}_{\text{n kpl}} = \frac{1}{n} < \epsilon.$$

Integraalin arvoa ei kuitenkaan saada Riemannin ehdon avulla.

2.18 Lause. *Jos kuvaus $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on monotoninen[8], niin f on integroituva.*

Todistus. Jos f on vakio, niin se on porraskuvaus, ja siksi integroituva.

Olkoon f kasvava ja $f(a) < f(b)$. Silloin f on rajoitettu, sillä $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ kaikilla $x \in [a,b]$. Sovelletaan Riemannin ehtoa. Olkoon $\epsilon > 0$, ja valitaan tasavälinen välin $[a,b]$ jako $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, missä $n \in \mathbb{N}$ ja

$$x_j - x_{j-1} = \frac{b-a}{n} < \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)} \quad \text{kaikilla } j = 1, 2, \ldots, n$$

Määritellään porraskuvaukset $g, h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} f(x_{j-1}), & \text{jos } x \in]x_{j-1}, x_j[,\ j = 1,2,\ldots,n, \\ f(a), & \text{jos } x \text{ on jakopiste,} \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} f(x_j), & \text{jos } x \in]x_{j-1}, x_j[,\ j = 1,2,\ldots,n, \\ f(b), & \text{jos } x \text{ on jakopiste,} \end{cases}$$

7. Toteuttakoot reaaliluvut c ja d epäyhtälön $c \leq d + \epsilon$ kaikilla $\epsilon > 0$. Todistetaan epäsuorasti, että $c \leq d$. Olkoon siis antiteesi: $c > d$. Silloin $(c-d)/2 > 0$, ja oletuksen mukaan $c \leq d + (c-d)/2$, joten $2(c-d) \leq c - d$. Koska $c - d > 0$, niin saadaan $2 < 1$. Tämä on ristiriidassa tiedon $1 < 2$ kanssa, joten antiteesi on väärä.

8. Monotoninen kuvaus on kasvava tai vähenevä. Kuvaus $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on kasvava, jos $f(x_1) \leq f(x_2)$ kaikilla $x_1, x_2 \in [a,b]$ siten, että $x_1 < x_2$. Kuvaus f on vähenevä, jos $-f$ on kasvava.

Tällöin $g \leq f \leq h$ ja

$$\begin{aligned}\int_a^b h - \int_a^b g = \int_a^b (h-g) &= \sum_{j=1}^n \big(f(x_j) - f(x_{j-1})\big)(x_j - x_{j-1}) \\ &= \Big(\sum_{j=1}^n f(x_j) - \sum_{j=1}^n f(x_{j-1})\Big)\frac{b-a}{n} \\ &= \Big(\big(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\big) - \big(f(x_0) + \cdots + f(x_{n-1})\big)\Big)\frac{b-a}{n} \\ &= \big(f(b) - f(a)\big)\frac{b-a}{n} < \big(f(b) - f(a)\big)\frac{\epsilon}{f(b)-f(a)} = \epsilon.\end{aligned}$$

Riemannin ehdon nojalla f on integroituva.

Jos f on vähenevä ja $f(a) > f(b)$, käy todistus samalla tavalla. Muita tapauksia ei ole. **m.o.t.**

2.19 Lause. *Jos $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva, niin f on integroituva.*

Todistus. Sivuutetaan. Todistus perustuu Riemannin ehtoon ja siihen, että f on peräti tasaisesti jatkuva. Huomaa, että jatkuuvuudesta suljetulla ja rajoitetulla välillä $[a,b]$ seuraa, että f on rajoitettu. **m.o.t.**

2.20 Esimerkki.
Kuvaukset $f_1, f_2, f_3\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \sin^{137} x$, $f_3(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, ovat jatkuvia, joten ne ovat integroituvia.

2.4 Integraalin ominaisuuksia

Integraali on lineaarinen:

2.21 Lause. *Olkoot $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integroituvia ja $\lambda \in \mathbb{R}$. Silloin $f+g$ ja λf ovat integroituvia sekä*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g \quad \textit{ja} \quad \int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f.$$

Todistus. Sivuutetaan todistus, joka perustuu supremumin ja infimumin ominaisuuksiin ja siihen, että porrasfunktion integraali on lineaarinen. Pelkkä summan ja tulon integroituvuus saadaan näppärästi Riemannin ehdolla. Tehdään se jälkimmäiselle, kun $\lambda > 0$. Olkoon $\epsilon > 0$. Koska f on integroituvia, niin Riemannin ehdon mukaisesti on olemassa porrasfunktiot $h_f, g_f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ siten, että

$$g_f \leq f \leq h_f \quad \text{ja} \quad \int_a^b h_f - \int_a^b g_f < \frac{\epsilon}{\lambda}.$$

Nyt λg_f ja λh_f ovat porrasfunktioita,

$$\lambda g_f \leq \lambda f \leq \lambda h_f \quad \text{ja} \quad \int_a^b \lambda h_f - \int_a^b \lambda g_f = \lambda\Big(\int_a^b (h_f - g_f)\Big) < \lambda \cdot \frac{\epsilon}{\lambda} = \epsilon.$$

Riemannnin ehto toteutuu, joten λf on integroituva. **m.o.t.**

2.22 Lause. *Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ rajoitettu ja $c \in]a,b[$. Kuvaus f on integroituva yli välin $[a,b]$, jos ja vain jos f on integroituva yli välin $[a,c]$ ja $[c,b]$. Tällöin*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Todistus. Sivuutetaan. Todistus perustuu siihen, porrasfunktioiden vastaava ominaisuus säilyy supremumin ja infimumin otossa. **m.o.t.**

Tähän asti on esiintynyt vain sellaisia integraaleja $\int_a^b f$, joissa $a < b$. Sallitaan seuraavalla määrittelyllä $a \geq b$.

2.23 Määritelmä. *Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, integroituva. Asetetaan*

$$\int_b^a f := -\int_a^b f \quad \textit{ja} \quad \int_a^a f := 0.$$

2.24 Huomautus.
1. Additiivisuus integrointivälin suhteen (lause 2.22) on yhä voimassa:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \text{ kaikilla } a, b, c \in \mathbb{R},$$

kunhan f on integroituva kaikilla näillä väleillä.

2. Paloittain jatkuvat kuvaukset[9] ovat integroituvia. Tämä johtuu siitä, että kuvauksen arvo yhdessä pisteessä ei vaikuta integraaliin.

2.25 Lause. *Olkoot $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integroituvia ja $f \leq g$. Tällöin*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Todistus. Huomataan, että $g - f \geq 0$. Integraalin lineaarisuuden (lause 2.21) nojalla $g - f$ on integroituva ja

$$\int_a^b g - \int_a^b f = \int_a^b (g - f) = \text{ala} \int_a^b (g - f) \geq \int_a^b 0 = 0,$$

sillä vakiokuvaus 0 on porrasfunktio. **m.o.t.**

2.26 Seuraus. *Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integroituva ja $m, M \in \mathbb{R}$ siten, että $m \leq f(x) \leq M$ kaikilla $x \in [a,b]$. Tällöin*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

Todistus. Sovelletaan edellistä lausetta ensin kuvauksiin f ja m, sitten kuvauksiin M ja f. **m.o.t.**

2.27 Esimerkkejä. Arvioidaan integraaleja.

1. Jokaisella $x \in [0,2]$ pätee

$$1 = \frac{4}{2+2} \leq \frac{4}{x+2} \leq \frac{4}{0+2} = 2.$$

Siten

$$2 = 1 \cdot (2-0) \leq \int_0^2 \frac{4}{x+2}\,dx \leq 2 \cdot (2-0) = 4.$$

---

9. Eli sellaiset jollakin välillä määritellyt kuvaukset, joilla on äärellinen määrä epäjatkuvuuskohtia.

2. Välillä $[0, \frac{\pi}{6}]$ sini on kasvava, joten

$$0 = \sin 0 \leq \sin x \leq \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \text{ eli } 0 \leq \sin^5 x \leq (\frac{1}{2})^5 = \frac{1}{32}$$

kaikillla $x \in [0, \frac{\pi}{6}]$. Siten

$$0 = 0 \cdot (\frac{\pi}{6} - 0) \leq \int_0^{\pi/6} \sin^5 x \, dx \leq \frac{1}{32} \cdot (\frac{\pi}{6} - 0) = \frac{\pi}{192} \approx 0,01636.$$

Porraskuvausten integroituvuudesta seuraa suoraan, että vakiofunktion 0 integraali on nolla. Epänegatiivisille jatkuville kuvauksille pätee myös käänteinen tulos.

2.28 Lause. *Olkoon $f \colon [a,b] \to [0,\infty[$, $a < b$, jatkuva. Jos $\int_a^b f = 0$, niin $f(x) = 0$ kaikilla $x \in [a,b]$.*

Todistus. Todistetaan lause epäsuorasti. Olkoon jokin piste $x_0 \in [a,b]$ siten, että $f(x_0) > 0$. Kuvauksen jatkuvuuden nojalla on olemassa väli $[c,d] \subset [a,b]$ siten, että $x_0 \in [c,d]$ ja $f(x) > f(x_0)/2$ kaikilla $x \in [c,d]$. Lauseiden 2.25 ja 2.22 nojalla

$$0 = \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^d f + \int_d^b f \geq \int_a^c 0 + \int_c^d \frac{f(x_0)}{2} + \int_d^b 0 = \frac{f(x_0)}{2} \cdot (d-c) > 0.$$

Tämä on ristiriita, joten antiteesi on epätosi. **m.o.t.**

2.29 Lause. *Olkoot $f, g \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integroituvia. Tällöin pätevät:*

1. *Kuvaus $|f|$ on integroituva ja*

$$\Big| \int_a^b f \Big| \leq \int_a^b |f|.$$

2. *Kuvaukset fg, f^2 ja g^2 ovat integroituvia ja*

$$\int_a^b fg \leq \Big(\int_a^b f^2 \Big)^{1/2} \Big(\int_a^b g^2 \Big)^{1/2}.$$

3. *Jos jollakin $\delta > 0$ on voimassa $g(x) \geq \delta$ kaikilla $x \in [a,b]$, niin f/g on integroituva.*

Todistus. Riemannin ehdolla näytetään, että $|f|$, fg ja f/g ovat integroituvia. Koska $-|f| \leq f \leq |f|$, niin lauseen 2.25 mukaan

$$\int_a^b -|f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|.$$

Kohtaa 2 varten näytetään ensin, että vastaava ominaisuus pätee porrasfunktioille. Paljastuu, että se säilyy supremumin ja infimumin otossa. **m.o.t.**

2.30 Huomautus. 1. Ensimmäisen kohdan epäyhtälö voi olla aito. Näin käy, jos $f(x) = x - \frac{1}{2}$ ja $[a,b] = [0,1]$. Silloin

$$\int_0^1 f = \int_0^1 (x - \frac{1}{2}) \, dx = \int_0^1 x \, dx - \frac{1}{2} \int_0^1 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

Koska $|f| \geq 0$, jatkuva ja ainakin yhdessä pisteeessä positiivinen, niin lauseen 2.28 mukaan $\int_0^1 |f| > 0$.

2. Yleensä edes porraskuvaukset eivät toteuta yhtälöä $\int_a^b fg = \int_a^b f \int_a^b g$. Esimerkiksi $[a,b] = [0,2]$ ja $f = g = 1$.
3. Toisen kohdan epäyhtälöä sanotaan *Hölderin epäyhtälöksi.* Siinäkin voi päteä aito erisuuruus.

2.5 Integraalilaskennan väliarvolause

2.31 Lause. *(Integraalilaskennan väliarvolause, IVAL.) Olkoon* $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$, $a<b$, *jatkuva. Tällöin on olemassa* $\xi\in[a,b]$ *siten, että*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$

Todistus. Koska f on jatkuva, niin se on integroituva. Edelleen jatkuvuutensa vuoksi kuvauksella f on suurin ja pienin arvo:

$$m\colon=\min\{f(x)\mid a\le x\le b\}\ \text{ ja }\ M\colon=\max\{f(x)\mid a\le x\le b\}.$$

Seurauksen 2.26 nojalla

$$m(b-a)\le\int_a^b f\le M(b-a)\ \text{eli}\ m\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f\le M.$$

Koska f on jatkuva, niin Bolzanon lauseen nojalla se saa kaikki arvot väliltä $[m,M]$. Siksi on olemassa $\xi\in[a,b]$ siten, että

$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f.$$

m.o.t.

2.32 Huomautus.
1. Lukua $\frac{1}{b-1}\int_a^b f$ sanotaan kuvauksen f ***keskiarvoksi*** välillä $[a,b]$. Siten integraalilaskennan väliarvolause sanoo, että jatkuva kuvaus saavuttaa keskiarvonsa välillä $[a,b]$. Englanniksi IVAL onkin "Mean Value Theorem".
2. Integraalilaskennan väliarvolauseen geometrinen sisältö epänegatiivisille kuvauksille on se, että kuvauksen kuvaajan rajaama pinta-ala on sama kuin suorakaiteen, jonka kanta on $b-a$ ja korkeus $f(\xi)$.

2.33 Esimerkki. Lasketaan integraalilaskennan väliarvolauseen avulla

$$\lim_{a\to1+}\frac{1}{a-1}\int_1^a 2x(3-\ln x)\,dx.$$

Olkoon $a>1$. Kuvaus $f(x)=2x(3-\ln x)$ on jatkuva välillä $[1,a]$, joten se on integroituva (lause 2.19). IVAL:n nojalla on olemassa $\xi\in[1,a]$ siten, että

$$\frac{1}{a-1}\int_1^a 2x(3-\ln x)\,dx=\frac{1}{a-1}2\xi(3-\ln\xi)(a-1)=2\xi(3-\ln\xi)\to2\cdot1(3-\ln1)=6,$$

kun $a\to1$, sillä silloin $\xi\to0$.

Luku 3

Riemann-integraali ja integraalifunktio

Riemann-integraalin laskeminen määritelmän avulla on hankalaa. Tässä luvussa tutkitaan Riemann-integraalin ja integraalifunktion eli antiderivaatan välistä yhteyttä. Paljastuu, että jos kuvaus $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva, niin silloin se on Riemann-integroituva yli jokaisen välin $[a,x] \subset [a,b]$, ja yksi sen antiderivaatta on

$$F\colon [a,b] \to \mathbb{R},\ F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Tämä mahdollistaa Riemann-integraalien laskemisen ensimmäisen luvun integrointimenetelmillä.

3.1 Lause. *Olkoon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integroituva. Silloin kuvaus*

$$F\colon [a,b] \to \mathbb{R},\ F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

on jatkuva.

Todistus. Lauseen 2.22 nojalla f on integroituva yli jokaisen välin $[a,x] \subset [a,b]$, joten F on määritelty kelvollisesti. Integroituvana kuvauksena f on rajoitettu, joten on olemassa $M > 0$ siten, että $|f| \le M$. Olkoon $a \le x \le y \le b$. Nyt

$$\begin{aligned}|F(y) - F(x)| &= \Big|\int_a^y f - \int_a^x f\Big| \underset{\text{lause 2.22}}{=} \Big|\int_a^x f + \int_x^y f - \int_a^x f\Big| \\ &= \Big|\int_x^y f\Big| \underset{\text{lause 2.29}}{\le} \int_x^y |f| \underset{\text{lause 2.25}}{\le} \int_x^y M = M(y-x).\end{aligned}$$

Siten $|F(x) - F(y)| \le M|x-y|$ kaikilla $x, y \in [a,b]$. Näin F on jatkuva, peräti Lipschitz-jatkuva. **m.o.t.**

Jos kuvaus f on jatkuva, niin saadaan tärkeä yhteys Riemann-integraalin ja derivaatan välille:

3.2 Lause. *(Integraalilaskennan päälause.) Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jatkuva. Tällöin kuvaus*

$$F\colon [a,b] \to \mathbb{R},\ F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

on derivoituva ja $F'(x) = f(x)$ kaikilla $x \in [a,b]$.

Todistus. Olkoon $x \in [a,b]$ ja $h \in \mathbb{R}$ siten, että $h \ne 0$ ja $x + h \in [a,b]$. Integraalilaskennan väliarvolauseen nojalla lukujen x ja $x+h$ välissä on luku ξ ja

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h}\Big(\int_a^{x+h} f - \int_a^x f\Big) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f \\ &= \frac{1}{h} f(\xi)(x+h-x) = f(\xi) \to f(x),\ \text{kun } h \to 0,\end{aligned}$$

sillä silloin $\xi \to x$. Näin F on derivoituva pisteessä[1] $x \in [a,b]$. **m.o.t.**

3.3 Huomautus. 1. Samoin voidaan näyttää, että kuvaukset $\int_c^x f$, $c \in [a,b]$, ovat derivoituvia ja niiden derivaatta on f.

2. Kuvaus $F(x) = \int_a^x f$ on siis yksi kuvauksen f antiderivaatta eli integraalifunktio. Koska ne ovat yksikäsitteisiä lisättävää vakiota vaille, niin kaikki jatkuvan kuvauksen f integraalifunktiot ovat $G(x) = \int_a^x f + C$, $C \in \mathbb{R}$.

3.4 Esimerkkejä. 1. Koska $\sin^2 t$ on jatkuva, niin

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \sin^2 t\,dt = \sin^2 x \text{ kaikilla } x > 0.$$

2. Koska t^3 on jatkuva, niin

$$\frac{d}{dx}\int_x^5 t^3\,dt = \frac{d}{dx}\Big(-\int_5^x t^3\,dt\Big) = -x^3.$$

Ketjusäännöstä ja integraalilaskennan päälauseesta seuraa:

3.5 Seuraus. *Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jatkuva ja $g\colon [c,d] \to [a,b]$ derivoituva. Tällöin kuvaus*

$$F\colon [c,d] \to \mathbb{R},\; F(x) = \int_a^{g(x)} f(t)\,dt,$$

on derivoituva ja $F'(x) = f\big(g(x)\big)g'(x)$ kaikilla $x \in [c,d]$.

3.6 Esimerkki. Lasketaan $F'(\mathrm{e})$, kun $F(x) = \int_0^{\sqrt{\ln x}} \mathrm{e}^{\,t^2}\,dt$, $x > 1$.

$$F'(x) = \mathrm{e}^{(\sqrt{\ln x})^2}\cdot\frac{d}{dx}\sqrt{\ln x} = \mathrm{e}^{\ln x}\cdot\frac{1}{2}\big(\ln x\big)^{-1/2}\frac{1}{x} = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}}.$$

Siten $F'(\mathrm{e}) = 1/(2\sqrt{\ln \mathrm{e}}\,) = \frac{1}{2}$.

3.7 Huomautus. Integraalilaskennan päälauseen tulos ei aina päde, jos f ei ole jatkuva. Olkoon esimerkiksi

$$f\colon [-1,1] \to \mathbb{R},\; f(x) = \begin{cases} 0, & \text{jos } -1 \le x \le 0,\\ 1, & \text{jos } 0 < x \le 1.\end{cases}$$

Paloittain jatkuvana kuvauksena f on integroituva ja

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \begin{cases} 0, & \text{jos } -1 \le x \le 0,\\ x, & \text{jos } 0 < x \le 1.\end{cases}$$

Tämä F ei kuitenkaan ole derivoituva origossa, joten se ei ole kuvauksen f antiderivaatta.

3.8 Lause. *Olkoon kuvaus $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jatkuva ja F sen integraalifunktio välillä $[a,b]$. Tällöin*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: \Big/_a^b F(x).$$

3.9 Huomautus. Näin jatkuvan kuvauksen Riemann-integraali lasketaan hakemalla sen antiderivaatta ja vähentämällä antiderivaatan arvot välin päätepisteissä.

1. Jos $x = a$ tai $x = b$, riittää toispuoleisen derivaatan olemassaolo.

Todistus. Olkoon $F_0(x) = \int_a^x f$. Integraalilaskennan päälauseen nojalla se on kuvauksen f antiderivaatta. Olkoon F jokin kuvauksen f antiderivaatta. Silloin $F = F_0 + C$, missä $C \in \mathbb{R}$ on vakio. Nyt

$$F(b) - F(a) = F_0(b) - F_0(a) = \int_a^b f - \int_a^a f = \int_a^b f + 0 = \int_a^b f.$$

m.o.t.

3.10 Esimerkki. Lasketaan $\int_0^1 x^2\,dx$. Koska $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$, niin

$$\int_0^1 x^2\,dx = \Big/_0^1 \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{3}\cdot 0^3 = \frac{1}{3}.$$

Luvun 1 keinoja voidaan käyttää Riemann-integraalien laskemiseen.

3.11 Lause. *(Osittaisintegrointi.) Jos $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ovat derivoituvia ja niiden derivaatat ovat Riemann-integroituvia, niin*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \Big/_a^b f(x)g(x) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

3.12 Esimerkki. Valitsemalla $f'(x) = \cos x$ ja $g(x) = x$ integroidaan osittain:

$$\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx = \Big/_0^{\pi/2} x\sin x - \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - 0 + \Big/_0^{\pi/2} \cos x = \frac{\pi}{2} - 1.$$

3.13 Lause. *(Muuttujanvaihto.) Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jatkuva ja $g\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$ jatkuvasti derivoituva. Tällöin*

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u)\,du = \int_\alpha^\beta f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx, \;\; u = g(x).$$

Huomaa, että sijoitusta takaisin alkuperäiseen muuttujaan ei tarvita.

3.14 Esimerkki. Lasketaan $\int_1^2 1/(1+\sqrt{x})\,dx$. Sijoitetaan $\sqrt{x} = t$, jolloin $[0,\infty[\to [0,\infty[$, $x(t) = t^2$, on jatkuvasti derivoituva bijektio ja $x'(t) = 2t$. Siten $x = 1$, jos t$= 1$, ja $x = 2$, jos $t = \sqrt{2}$. Lisäksi

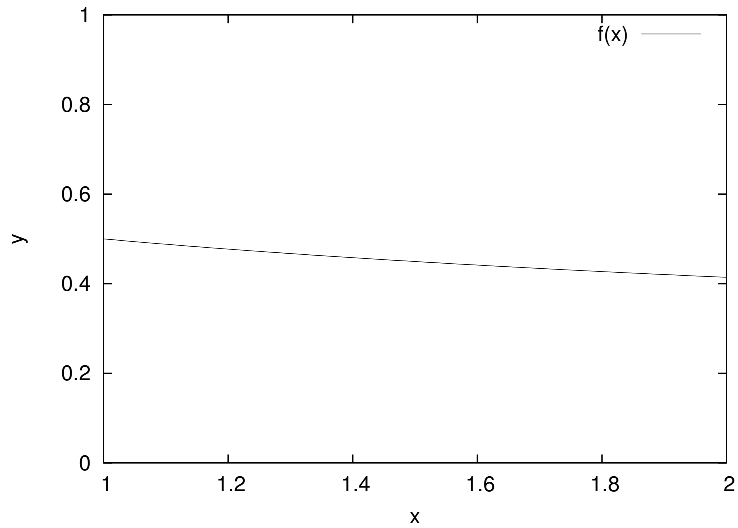
$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx &= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2t}{1+t}\,dt = 2\int_1^{\sqrt{2}} \Big(1 - \frac{1}{1+t}\Big)\,dt = 2\Big/_1^{\sqrt{2}} \big(t - \ln|1+t|\big) \\ &= 2\big(\sqrt{2} - \ln|1+\sqrt{2}| - 1 + \ln 2| = 2\Big(\ln\frac{2}{1+\sqrt{2}} + \sqrt{2} - 1\Big) \approx 0,452.\end{aligned}$$

3.15 Huomautus. Riemann-integraalien laskun tarkastamiseen on kaksi keinoa.

1. Tarkastetaan derivoimalla, onko laskettu antiderivaatta viimeisimmässä sijoituksessa todella integroitavan kuvauksen antiderivaatta. Edellisen esimerkin tapauksessa lasketaan siis:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}2(t - \ln|1+t|) &= \Big(\frac{d}{dt}2(t - \ln|1+t|)\Big)\frac{dt}{dx} = 2\Big(1 - \frac{1}{1+t}\Big)\frac{d}{dx}\sqrt{x} \\ &= 2\frac{1+t-1}{1+t}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{t}{1+t}\cdot\frac{1}{t} = \frac{1}{1+t} = \frac{1}{1+\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

2. Pirretään kuvauksen f kuvaaja ruutupaperille (tms.) ja mitataan sen ja suorien $x = a$, $x = b$ ja $y = 0$ rajaaman alueen pinta-ala. Edellisen esimerkin tapauksessa paperilta saadaan helposti $A \approx 0,45$, ks. kuva 3.1. Suurempi tarkkuus vaatii enemmän huolellisuutta kuvaajan piirrossa ja pinta-alan mittaamisessa.



Kuva 3.1: Kuvauksen $x \mapsto 1/(1+\sqrt{x})$ kuvaaja välillä $[1, 2]$.

3.16 Huomautus. Olkoon $f\colon [-a, a] \to \mathbb{R}$, $a > 0$, on Riemann-integroituva. Jos f *pariton* eli $f(x) = -f(x)$ kaikilla $x \in [-a, a]$, niin

$$\int_{-a}^{a} f(x) = 0.$$

Jos f on *parillinen* eli $f(x) = f(x)$ kaikilla $x \in [-a, a]$, niin

$$\int_{-a}^{a} f(x) = 2\int_{0}^{a} f(x)\, dx.$$

Nämä kaavat osoitetaan muuttujanvaihdolla: jos f on pariton, niin valitaan $y = -x$, jolloin $dx = -dy$ ja

$$\int_{-a}^{0} f(x)\, dx = \int_{a}^{0} f(-y)\,(-dy) = -\int_{0}^{a} f(y)\, dy.$$

Jos taas f on parillinen, niin

$$\int_{-a}^{0} f(x)\, dx = \int_{0}^{a} f(y)\, dy.$$

Luku 4

Epäoleelliset integraalit

Riemann-integraalin $\int_a^b f$ määritelmässä vaadittiin, että integroitava funktio f ja integroimisväli $[a,b]$ ovat *rajoitettuja*[1] . Tässä luvussa laajennetaan integraalin käsite myös sellaisiin tapauksiin, joissa f ei ole rajoitettu tai integroimisväli on muotoa $]-\infty,a]$, $[a,\infty[$ tai $]-\infty,\infty[$. Annetaan ensimmäiseksi integroimisvälin olla rajoittamaton, mutta pidetään kuvaus rajoitettuna.

4.1 Määritelmä. *1. Olkoon $f\colon[a,\infty[\to\mathbb{R}$ integroituva jokaisella välillä $[a,c]$, $c>a$. Kuvauksen f epäoleellinen integraali on*

$$\int_a^\infty f = \int_a^\infty f(x)\,dx :\, = \lim_{c\to\infty}\int_a^c f,$$

jos tämä raja-arvo on olemassa[2]*. Jos lisäksi tämä raja-arvo on äärellinen, niin sanotaan, että $\int_a^\infty f$ suppenee.*

2. Olkoon $f\colon]-\infty,a]\to\mathbb{R}$ integroituva jokaisella välillä $[c,a]$, $c<a$. Kuvauksen f epäoleellinen integraali on

$$\int_{-\infty}^a f = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx :\, = \lim_{c\to-\infty}\int_c^a f,$$

jos tämä raja-arvo on olemassa. Jos lisäksi tämä raja-arvo on äärellinen, niin sanotaan, että $\int_{-\infty}^a f$ suppenee.

3. Kuvauksen $f\colon]-\infty,\infty[\to\mathbb{R}$ epäoleellinen integraali on

$$\int_{-\infty}^\infty f = \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx :\, = \int_{-\infty}^a f + \int_a^\infty f,$$

jos jollakin $a\in\mathbb{R}$ sekä $\int_{-\infty}^a f$ että $\int_a^\infty f$ suppenevat.
Jos epäoleellinen integraali ei suppene, niin sanotaan, että se hajaantuu.

4.2 Esimerkkejä. 1. Suppeneeko $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$? Kuvaus $\frac{1}{x}$ on jatkuva, joten se on integroituva kaikilla väleillä $[1,c]$, $c>1$. Siten

$$\int_1^c \frac{1}{x}\,dx = \Big/_1^c \ln x = \ln c - \ln 1 = \ln c \to \infty,\ \text{kun } c\to\infty.$$

Näin ollen kyseinen epäoleellinen integraali hajaantuu. Lisäksi $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \infty$.

---

1. Avoimilla tai puoliavoimilla väleillä $]a,b[$, $]a,b]$ ja $[a,b[$ integraali on jo oikeastaan määritelty, sillä integraali ei riipu integroitavan funktion arvoista yksittäisissä pisteissä. Samoin on oikeastaan määritelty esimerkiksi kuvauksen $f\colon]-1,1[\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$, integroituvuus ja integraali. Kuvauksen määrittelyjoukosta puuttuu yksi piste, mutta se voidaan sinne lisätä ja määritellä kuvaus origossa miten tahansa. Korjatun kuvauksen integraali ei riipu siitä, mikä arvo kuvaukselle origossa annetaan. Näin $\int_{-1}^1 f = \int_{-1}^1 x\,dx = 0$.
2. Tällä tarkoitetaan tässä luvussa sitä, että raja-arvo on äärellinen, ∞ tai $-\infty$.

2. Suppeneeko $\int_1^\infty 1/x^p\,dx$, kun $p \neq 1$? Kuvaus $1/x^p$ on jatkuva jokaisella välillä $[1, c]$, $c > 1$, joten se se on niillä integroituva ja

$$\int_1^c \frac{1}{x^p}\,dx = \Big/_{\!1}^{c} \frac{1}{1-p}x^{1-p} = \frac{1}{1-p}(c^{1-p} - 1) \to \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & \text{jos } p > 1, \\ \infty, & \text{jos } p < 1, \end{cases}$$

kun $c \to \infty$. Näin epäoleellinen integraali $\int_1^\infty 1/x^p\,dx$ suppenee, jos $p > 1$. Muulloin se hajaantuu.

3. Suppeneeko $\int_{-\infty}^\infty x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,dx$? Kuvaus $x\,\mathrm{e}^{-x^2}$ on jatkuva, joten se on integroituva jokaisella välillä $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Olkoon $c > 0$. Silloin

$$\int_0^c x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,dx = \Big/_{\!0}^{c} -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-c^2} \to \frac{1}{2}, \text{ kun } c \to \infty,$$

$$\int_{-c}^0 x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,dx = \Big/_{\!-c}^{0} -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-c^2} \to -\frac{1}{2}, \text{ kun } c \to \infty.$$

Siten epäoleelliset integraalit $\int_0^\infty x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,dx$ ja $\int_{-\infty}^0 x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,dx$ suppenevat, joten tarkasteltavakin epäoleellinen integraali suppenee ja

$$\int_{-\infty}^\infty x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^0 x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,dx + \int_0^\infty x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

4. Suppeneeko $\int_0^\infty \cos x\,dx$? Kosini on jatkuva, joten se on integroituva jokaisella välillä $[0, c]$, $c > 0$. Koska

$$\int_0^c \cos x\,dx = \Big/_{\!0}^{c} \sin x = \sin c \quad \text{ja} \quad \lim_{c\to\infty} \sin c$$

ei ole olemassa, niin kyseinen epäoleellinen integraali ei suppene.

5. Suppeneeko $\int_{-\infty}^\infty x\,dx$? Pätee kylläkin

$$\int_{-c}^c x\,dx = \Big/_{\!-c}^{c} \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{2}c^2 = 0 \to 0, \text{ kun } c \to \infty.$$

Silti kyseinen integraali hajaantuu, sillä kaikilla $b \in \mathbb{R}$

$$\int_b^c x\,dx = \Big/_{\!b}^{c} \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{2}b^2 \to \infty, \text{ kun } c \to \infty$$

eli $\int_b^\infty x\,dx$ hajaantuu.

Sallitaan seuraavaksi kuvauksen olla rajoittamaton integrointivälin päätepisteiden lähellä.

4.3 Määritelmä. *Olkoon $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.*

1. *Jos f on integroituva jokaisella välillä $[a, c]$, $a < c < b$, niin asetetaan*

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx :=\lim_{c\to b-} \int_a^c f,$$

jos tämä raja-arvo on olemassa. Jos se on lisäksi äärellinen, niin sanotaan, että epäoleellinen integraali $\int_a^b f$ suppenee.

2. *Jos f on integroituva jokaisella välillä $[c, b]$, $a < c < b$, niin asetetaan*

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx :=\lim_{c\to a+} \int_c^b f,$$

jos tämä raja-arvo on olemassa. Jos se on lisäksi äärellinen, niin sanotaan, että epäoleellinen integraali $\int_a^b f$ suppenee.

3. Jos jollakin $c \in]a,b[$ sekä $\int_a^c f$ että $\int_c^b f$ suppenevat, niin asetetaan

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx :=\int_a^c f + \int_c^b f$$

ja sanotaan, että tämä epäoleellinen integraali suppenee.
Jos epäoleellinen integraali ei suppene, niin sanotaan, että se hajaantuu.

4.4 Esimerkkejä. 1. Suppeneeko $\int_0^1 1/\sqrt{x}\,dx$? Kuvaus $1/\sqrt{x}$ on jatkuva, joten se on integroituva jokaisella välillä $[c,1]$, $0<c<1$. Siten

$$\int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \Big/_{c}^{1} 2\sqrt{x} = 2-2\sqrt{c} \to 2, \text{ kun } c \to 0+.$$

Siten kyseinen integraali suppenee ja se on 2.

2. Suppeneeko $\int_0^1 1/x^p\,dx$, $p>0$? Integroitava kuvaus on jatkuva jokaisella välillä $[c,1]$, $c\in]0,1[$, joten se on niillä integroituva ja

$$\int_c^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \Big/_{c}^{1} \ln x = -\ln c \to \infty, \text{ jos } p=1, \\ \Big/_{c}^{1} \frac{1}{1-p}x^{1-p} = \frac{1}{1-p}(1-c^{1-p}) \to \begin{cases} \infty, \text{ jos } p>1, \\ \frac{1}{1-p}, \text{ jos } 0<p<1, \end{cases} \end{cases}$$

kun $c\to 0+$. Siten kyseinen integraali suppenee, jos $0<p<1$. Jos $p\geq 1$, se hajaantuu. Huomaa, että jos $p\leq 0$, niin $1/x^p$ on jatkuva välillä $[0,1]$ ja siksi integroituva välillä $[0,1]$.

3. Suppeneeko

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,?$$

Integroitava kuvaus on jatkuva jokaisella välillä $[-c,c]$, $c\in]0,1[$, joten se on niillä integroituva. Sinin käänteiskuvauksen derivointikaavan perusteella

$$\int_0^c \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \Big/_{0}^{c} \arcsin x = \arcsin c \to \frac{\pi}{2}, \text{ kun } c\to 1-.$$

Samoin

$$\int_d^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \Big/_{d}^{0} \arcsin x = -\arcsin d \to \frac{\pi}{2}, \text{ kun } d \to -1+.$$

Siten kyseinen integraali suppenee ja se on $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$.

4.5 Huomautus. Jos integroimisväli on $]-\infty,\infty[$ tai integroitava kuvaus ei ole rajoitettu integroimisvälin $[a,b]$ kummankaan päätepisteen lähellä, niin määritelmissä 4.1 ja 4.3 integroimisväli jaetaan kahteen osaan niin, että kummankin osan epäoleellisen integraalin tulisi supeta. Samalla periaatteella määritellään epäoleelliset integraalit ja niiden suppeneminen tapauksissa, joissa ongelmapiste[3] on integroimisvälin sisällä tai niitä on monta.

4.6 Esimerkkejä. 1. Suppeneeko

$$J:=\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^3}\,dx\,?$$

Integroitava kuvaus $1/(x-1)^3$on jatkuva kaikkialla paitsi pisteessä $x=1$, jonka lähellä se ei ole rajoitettu. Siten

$$\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^3}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^3}\,dx + \int_1^3 \frac{1}{(x-1)^3}\,dx =: J_1 + J_2.$$

3. Siis piste, jonka lähellä integroitava kuvaus ei ole rajoitettu.

Näistä ensimmäinen hajaantuu, sillä

$$\int_0^c \frac{1}{(x-1)^3}\,dx = \Big/_0^c \frac{-2}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(c-1)^2} + 2 \to -\infty, \text{ kun } c \to 1- .$$

Siten myös J hajaantuu.

2. Suppeneeko

$$J := \int_0^9 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx\,?$$

Integroitava kuvaus $1/(x-1)^{1/3}$ on jatkuva kaikkialla paitsi pisteessä[4] $x = 1$, jonka lähellä se ei ole rajoitettu. Siten

$$\int_0^9 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx + \int_1^9 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx =: J_1 + J_2.$$

Nämä molemmat suppenevat, sillä

$$\int_0^c \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx = \Big/_0^c \frac{3}{2}(x-1)^{2/3} = \frac{3}{2}(c-1)^{2/3} - \frac{3}{2} \to -\frac{3}{2}, \text{ kun } c \to 1-,$$

$$\int_c^9 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx = \Big/_c^9 \frac{3}{2}(x-1)^{2/3} = \frac{3}{2}(2^3)^{2/3} - \frac{3}{2}(c-1)^{2/3} \to 6,$$

kun $c \to 1+$. Siten J suppenee ja $J = J_1 + J_2 = -\frac{3}{2} + 6 = 4\frac{1}{2}$.

4.1 Majorantti- ja minoranttiperiaate

Epäoleellisen integraalin suppeneminen tai hajaantuminen voi seurata helposti sopivan vertailuintegraalin käyttäytymisestä.

4.7 Lause. *1. Olkoon $f\colon [a,\infty[\to [0,\infty[$ integroituva yli jokaisen välin $[a,c]$, $c > a$. Tällöin $\int_a^\infty f$ suppenee, jos ja vain jos on olemassa $M > 0$ siten, että*

$$\int_a^c f \le M \text{ kaikilla } c \ge a.$$

2. Olkoon $f\colon [a,b[\to [0,\infty[$ integroituva yli jokaisen välin $[a,c] \subset [a,b[$. Tällöin $\int_a^b f$ suppenee, jos ja vain jos on olemassa $M > 0$ siten, että

$$\int_a^c f \le M \text{ kaikilla } c \in [a,b[.$$

Todistus. Todistetaan ensimmäinen kohta. Supetkoon $\int_a^\infty f$ eli

$$\lim_{c\to\infty} \int_a^c f = \alpha \in [0,\infty[.$$

Koska kuvaus $c \mapsto F(c) = \int_a^c f$ on kasvava, niin $F(c) \le \alpha$ kaikilla c.

Olkoon $F(c) \le M$ kaikilla $c > a$. Koska F on kasvava ja ylhäältä rajoitettu, niin on olemassa raja-arvo $\lim_{c\to\infty} F(c)$. Toisin sanoen $\int_0^\infty f$ suppenee.

Toinen kohta todistetaan samoin. **m.o.t.**

4.8 Lause. *(Majorantti- ja minoranttiperiaate.) Olkoon $-\infty \le a < b \le \infty$ ja kuvaukset $f, g\colon]a,b[\to [0,\infty[$ siten, että $g \le f$ ja ne ovat integroituvia jokaisella välillä $[c,d] \subset]a,b[$, $a < c < d < b$.*

---

4. Paritonta potenssia vastaavat juuret on määritelty kaikkialla. Esimerkiksi $\sqrt[3]{-8} = -2$.

(a) Jos $\int_a^b f$ suppenee, niin $\int_a^b g$ suppenee.

(b) Jos $\int_a^b g$ hajaantuu, niin $\int_a^b f$ hajaantuu.

Todistus. Todistetaan väitteet tapauksessa $a \in \mathbb{R}$ ja $b = \infty$. Jos $\int_a^\infty f$ suppenee, niin lauseiden 2.25 ja 4.7 nojalla on $M > 0$ siten, että

$$\int_a^c g \leq \int_a^c f \leq M \text{ kaikilla } c > a.$$

Lauseen 4.7 nojalla $\int_a^\infty g$ suppenee.

Jos $\int_a^\infty g$ hajaantuu, niin lauseiden 2.25 ja 4.7 mukaan

$$\int_a^c f \geq \int_a^c g \to \infty, \text{ kun } c \to \infty.$$

Siten $\int_a^\infty f$ hajaantuu.

Tapaukset $a = -\infty$ ja $b \in \mathbb{R}$ tai $a, b \in \mathbb{R}$ ja kuvaukset rajoittamattomia vain yhden välin $[a, b]$ päätepisteen lähellä todistetaan samoin. Tapaukset $a = -\infty$ ja $b = \infty$ tai $a, b \in \mathbb{R}$ ja kuvaukset rajoittamattomia välin $[a, b]$ kummankin päätepisteen lähellä palautuvat näihin. **m.o.t.**

4.9 Huomautus. 1. Kuvaus $1/x^p$, $p > 0$, on hyvä vertailufunktio.

2. Majorantti- ja minoranttiperiaate pätee vain epänegatiivisille kuvauksille!
3. Majoranttikuvauksen integraali on yläarvio suppenevalle epäoleelliselle integraalille.

4.10 Esimerkkejä. 1. Suppeneeko

$$J\colon = \int_1^\infty \frac{|\cos x|}{x^2}\, dx\,?$$

Kuvaukset $|\cos x|/x^2$ ja $1/x^2$ ovat jatkuvia jokaisella välillä $[1, c]$, $c > 1$, joten ne ovat niillä myös integroituvia. Lisäksi

$$0 \leq \frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \text{ kaikilla } x > 1 \text{ ja } \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx \text{ suppenee,}$$

joten majoranttiperiaatteen nojalla myös J suppenee ja

$$0 \leq J \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx = 1.$$

2. Suppeneeko

$$J\colon = \int_0^1 \frac{\sin x}{x^2}\, dx\,?$$

Kuvaukset $\sin x/x^2$ ja $1/2x$ ovat jatkuvia jokaisella välillä $[c, 1]$, $0 < c < 1$, joten ne ovat niillä integroituvia. Koska $x/2 \leq \sin x \leq x$ kaikilla $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, niin

$$0 \leq \frac{1}{2x} \leq \frac{\sin x}{x^2} \text{ kaikilla } x \in]0, 1].$$

Koska $\int_0^1 1/(2x)\, dx$ hajaantuu, niin minoranttiperiaatteen nojalla myös J hajaantuu.

Luku 5

Integraalilaskennan sovellutuksia

Tässä luvussa sovelletaan integraalin käsitettä tasoalueiden pinta-alaan, pyörähdyskappaleen tilavuuteen sekä matkaan, nopeuteen ja kiihtyvyyteen. Lopuksi tutustutaan Riemann-integraalien laskemiseen numeerisesti.

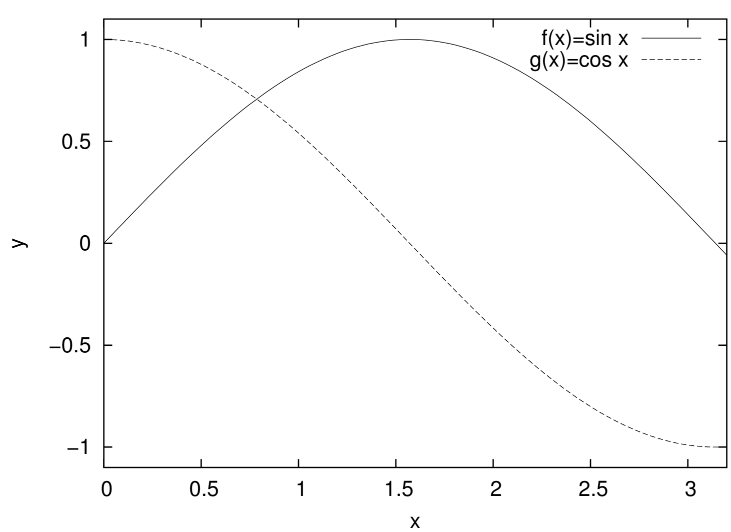
5.1 Tasoalueen pinta-ala

Riemann-integraali määriteltiin niin, että $\int_a^b f$ on sen tasoalueen pinta-ala, jonka rajaavat suorat $x = a$, $x = b$ ja $y = 0$ sekä kuvauksen f kuvaaja ainakin, jos f on jatkuva ja epänegatiivinen. Seuraava määritelmä yleistää pinta-alan myös epäjatkuville ja negatiivisia arvoja saaville kuvauksille.

5.1 Määritelmä. *Olkoot $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ integroituvia. Reaaliluku*

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx \tag{5.1}$$

on kuvausten f ja g kuvaajien ja suorien $x = a$ ja $x = b$ rajaaman tasoalueen pinta-ala.



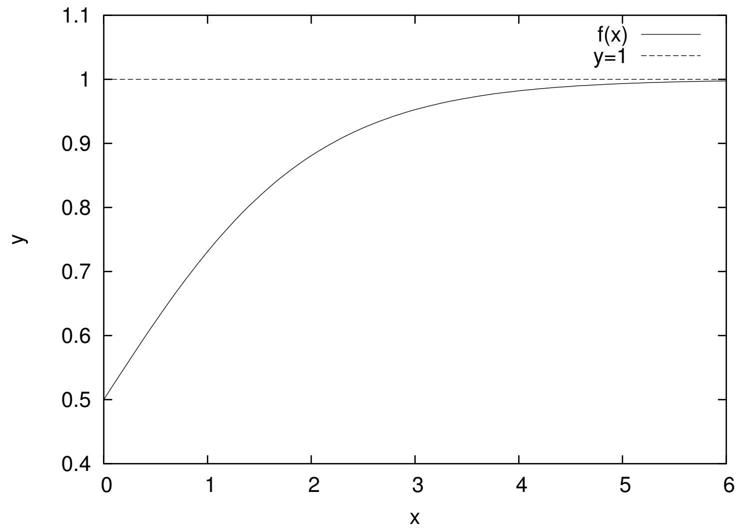
Kuva 5.1: Kuvauksien $f(x) = \sin x$ ja $g(x) = \cos x$ ja suorien $x = 0$ ja $x = \pi$ rajaaman alueen pinta-ala.

5.2 Esimerkki. 1. Lasketaan käyrien $y = \sin x$ ja $y = \cos x$ väliin jäävä pinta-ala, kun $0 \leq x \leq \pi$. Ensin on laskettava näiden käyrien leikkauspisteet:

$$\sin x = \cos x \Longrightarrow \tan x = 1 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Näistä vain $\frac{\pi}{4}$ on välillä $]0, \pi]$. Laskettava pinta-ala on siten

$$
\begin{aligned}
A = \int_0^{\pi} |\sin x - \cos x|\,dx = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\,dx \\
+ \int_{\pi/4}^{\pi} (\sin x - \cos x)\,dx = \Big/_0^{\pi/4} (\sin x + \cos x) + \Big/_{\pi/4}^{\pi} (-\cos x - \sin x) \\
= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 - 1 + 1 + 0 - (-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}) = 2\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$



Kuva 5.2: Kuvauksen $f(x) = \mathrm{e}^x/(1 + \mathrm{e}^x)$ kuvaajan ja suorien $y = 1$ ja $x = 0$ rajaaman alueen pinta-ala.

2. Lasketaan käyrän $e = \mathrm{e}^x/(1 + \mathrm{e}^x)$ ja suorien $y = 1$ ja $x = 0$ rajaaman kuvion pinta-ala. Tämä kuvio ei ole rajoitettu, mutta silti kaava (5.1) on luonnollinen tulkinta kuvion pinta-alaksi, joka siten on epäoleellinen integraali

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \Big|1 - \frac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x}\Big|\,dx = \lim_{c\to\infty} \int_0^{c} \Big(1 - \frac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x}\Big)\,dx \\
= \lim_{c\to\infty} \Big/_0^{c} \Big(x - \ln\big(1 + \mathrm{e}^x\big)\Big) = \lim_{c\to\infty} \big(c - \ln(1 + \mathrm{e}^c) + \ln 2\big) \\
= \lim_{c\to\infty} \big(c - \ln \mathrm{e}^c - \ln(\mathrm{e}^{-c} + 1) + \ln 2\big) = \ln 2 \approx 0{,}693.
\end{aligned}
$$

Kuvasta 5.2 arvioidaan, että kyseinen pinta-ala on likimain $\frac{1}{2} \cdot 0{,}5 \cdot 2{,}8 = 0{,}7$.

5.2 Pyörähdyskappaleen tilavuus

Olkoon $f\colon [a, b] \to [0, \infty[$ jatkuva. Kun sen kuvaaja pyörähtää x-akselin ympäri, syntyy kappale, jonka tilavuus on

$$V = \int_a^b \pi f(x)^2\,dx. \tag{5.2}$$

Jokaisella $x \in [a, b]$ pyörähdyskappaleen poikkileikkaus on ympyrä, jonka säde on $f(x)$ ja pinta-ala on siten $\pi f(x)^2$. Pyörähdyskappaletta voidaan approksimoida pinolla kiekkoja. Tällainen kiekkopino syntyy, kun kuvausta f approksimoidaan porrasfunktiolla g. Kunkin kiekon tilavuus on $\pi g(x)^2(x_j - x_{j-1})$, kun $x \in]x_{j-1}, x_j[$.

Kiekkojen ohetessa eli porrasfunktion jaon tihetessä saadaan rajalla tilavuudelle lauseke (5.2).

5.3 Esimerkkejä. 1. Johdetaan tuttu kartion tilavuuden kaava $V = \frac{1}{3}Ah$, missä A on sen pohjan ala ja h korkeus. Olkoon pohjan säde $r > 0$, jolloin pohjan ala $A = \pi r^2$. Kartio syntyy, kun jana $y = \frac{r}{h}x$, $0 \leq x \leq h$, pyöräytetään x-akselin ympäri. Kartion tilavuus on kaavan (5.2) mukaan

$$V = \int_0^r \pi\big(\frac{r}{h}x\big)^2\,dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \Big/_0^h \frac{1}{3}x^3 = \frac{\pi r^2}{h^2}\frac{1}{3}h^3 = \frac{1}{3}(\pi r^2)h = \frac{1}{3}Ah.$$

2. Käyrä $y = x^2$ pyöräytetään x-akselin ympäri välillä $0 \leq x \leq 2$. Syntyvän pyörähdyskappaleen tilavuus on

$$V = \int_0^2 \pi(x^2)^2\,dx = \Big/_0^2 \frac{\pi}{5}x^5 = \frac{32\pi}{5} \approx 20,11.$$

5.3 Matka, nopeus ja kiihtyvyys

Jos kappale liikkuu matkan s ajassa t, niin sen ***keskinopeus*** on $v = s/t$. Oletetaan, että kappale voi liikkua pitkin suoraa ja että $s(t)$ on sen sijainti hetkellä t. Jos $s(t)$ on kasvava eli kappale liikkuu vain yhteen suuntaan (vasemmalta oikealle), niin ajassa $t_1 - t$ se liikkuu matkan $s(t_1) - s(t)$, ja sen keskinopeus on

$$\frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t}.$$

Lyhentämällä ajanjaksoa $[t, t_1]$ rajatta saadaan määriteltyä kappaleen ***nopeus*** $v(t)$ hetkellä t:

$$v(t) := \lim_{t_1 \to t} \frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t}.$$

Nopeus on siis kuvauksen $s(t)$ derivaatta eli $v(t) = s'(t)$.

Jos $v(t)$ on jatkuva, niin integraalilaskennan päälauseen mukaan kappaleen siirtymä aikavälillä $[t_0, t_1]$ on

$$s(t_1) - s(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt. \tag{5.3}$$

Kappaleen kulkema kokonaismatka aikavälillä $[t_0, t_1]$ ottaa huomioon mahdollisen edestakaisin kuljeskelun. Se on[1]

$$l(t_1) - l(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} |v(t)|\,dt. \tag{5.4}$$

Olkoon $s(t)$ kappaleen sijainti hetkellä t. Kappaleen nopeus $v(t)$ hetkellä t on keskimääräisen nopeuden raja-arvo eli derivaatta $s'(t)$. Samoin kappaleen ***kiihtyvyys*** hetkellä t on keskimääräisen kiihtyvyyden (=nopeuden muutos/aikavälin pituus) raja-arvo eli derivaatta $v'(t) = s''(t)$.

Johdetaan tasaisesti kiihtyvän (tai hidastuvan) liikkeen kaavat. Kiihtyvyys on siis vakio eli $s''(t) = a$, missä $a \in \mathbb{R}$ on vakio. Kaikki kiihtyvyyden antiderivaatat ovat $s'(t) = at + C_1$, missä $C_1 \in \mathbb{R}$ on vakio. Tästä saadaan kaikki nopeuden antiderivaatat $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + C_1 t + C_2$ missä $C_2 \in \mathbb{R}$ on vakio. Näin tasaisesti kiihtyvälle liikkeelle

$$v(t) = at + C_1 \quad \text{ja} \quad s(t) = \frac{1}{2}t^2 + C_1 t + C_2.$$

1. On mahdollista määritellä ja mitata kappaleen nopeus esimerkiksi vain toispuoleisten derivaattojen avulla. Tämä on luontevaa törmäyksien tarkastelemisessa. Jos nopeudet ovat Riemann-integroituvia kaikilla väleillä, niin kaavat (5.3) ja (5.4) ovat yhä voimassa, mutta kappaleen sijainti tai kuljettu matka eivät välttämättä ole derivoituvia kuvauksia.

Vakiot C_1 ja C_2 määräytyvät *alkuehdoista* $s(0) = s_0$ ja $v(0) = v_0$. Saadaan, että $C_1 = v_0$ ja $C_2 = s_0$. Siten

$$v(t) = at + v_0 \quad \text{ja} \quad s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0. \tag{5.5}$$

5.4 Esimerkki. Einsteinin hissi. Albert Einsteinin ekvivalenssiperiaatteen mukaan gravitaatio- ja inertiamassa eli painovoima- ja hitausmassa ovat yhtäsuuret. Niin ollen vapaasti putoavassa hississä ei ole painovoimaa, vaan hissin matkustajat kokevat aidon painottoman tilan. Sellaista hissiä sanotaan Einsteinin hissiksi. Lasketaan, kauanko painottomuudesta voi nauttia, kun hissin vapaa putoamismatka on 300 m. On siis $s_0 = 0 = v_0$ ja $a = 9,81\ \mathrm{m/s^2}$. Siten vapaan putoamisen ajan pätee

$$v(t) = at \quad \text{ja} \quad s(t) = \frac{1}{2}at^2 \text{ eli } t = \sqrt{\frac{2s(t)}{a}}.$$

Vapaa putoaminen kestää siis ajan

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 300\mathrm{m}}{9,81\mathrm{m/s^2}}} \approx 7,8\,\mathrm{s}.$$

sen päättyessä nopeus $v(t) = at = 9,81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 7,8\ \mathrm{s} = 76,7\ \mathrm{m/s} = 276\ \mathrm{km/h}$.

5.4 Numeerista integrointia

Monen varsin yksinkertaisen kuvauksen (kuten e^{x^2}) antiderivaattaa on vaikea tai jopa mahdoton laskea alkeiskuvausten avulla. Niinpä Riemann-integraalien laskemiseksi tarvitaan muita keinoja. Yksi niistä on *numeerinen integrointi.*

Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integroituva. Integraalin $\int_a^b f$ laskemiseksi korvataan kuvaus f kuvauksella $\tilde{f}$, joka on likimain f ja jonka integraali lasketaan helposti tietokoneen, laskimen tai laskutikun avulla. Tietokoneiden kehittyminen ja yleistyminen on tehnyt numeerisen integroinnin helpoksi, mutta numeerisella integroinnilla on vuosisatojen historia tieteissä. Esimerkiksi Johannes Kepler (1571–1630) käytti tässä luvussa esiteltävää Simpsonin menetelmää[2], vaikka koko integraalin käsitettä ei ollut hänen aikanaan vielä kelvollisesti määritelty. Koska $f \approx \tilde{f}$, niin lauseen 2.25 nojalla

$$\int_a^b f \approx \int_a^b \tilde{f}. \tag{5.6}$$

Numeerisen integrointimenetelmän (5.6) *virhe* on

$$E(f) := \int_a^b f - \int_a^b \tilde{f}.$$

Valitaan välin $[a,b]$ tasavälinen jako $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Sen jakovälin pituus on $h := (b-a)/n$ ja jakopiste $x_j = a + jh$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

5.4.1 Suorakaidesääntö

Valitaan approksimaatiksi $\tilde{f}$ *porraskuvaus*

$$\tilde{f}\colon [a,b] \to \mathbb{R},\ \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x_j), & \text{jos } x \in]x_{j-1}, x_j],\ j = 1, 2, \ldots, n, \\ f(a), & \text{jos } x = a. \end{cases}$$

Silloin saadaan *suorakaidesääntö*

$$\int_a^b f \approx \sum_{j=1}^n f(x_j)h = h\sum_{j=1}^n f(a + jh). \tag{5.7}$$

2. ...ja 130 vuotta ennen Thomas Simpsonia!

5.5 Esimerkki. Lasketaan integraali

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \Big/_1^2 \ln x = \ln 2 \approx 0,6931471806$$

suorakaidesäännöllä. Nyt $a = 1$, $b = 2$ ja $f(x) = 1/x$. Olkoon $n = 2$, jolloin $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{2}$, ja

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\Big) = \frac{7}{12} \approx 0,583333.$$

Virhe on $\ln 2 - 0,583333 \approx 0,109814 \approx 0,11$. Jos $n = 4$, niin $h = \frac{1}{4}$ ja

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{1+\frac{1}{4}} + \frac{1}{1+\frac{2}{4}} + \frac{1}{1+\frac{3}{4}} + \frac{1}{1+\frac{4}{4}}\Big) = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \approx 0,634524.$$

Virhe on $\ln 2 - 0,634524 \approx 0,058623 \approx 0,06$. Jos $n = 8$, niin $h = \frac{1}{8}$ ja

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx \frac{1}{8}\Big(\frac{1}{1+\frac{1}{8}} + \frac{1}{1+\frac{2}{8}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{8}{8}}\Big) = \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{16} \approx 0,662872.$$

Virhe on $\ln 2 - 0,662872 \approx 0,030275 \approx 0,03$.

Virhe näyttää puolittuvan, kun jakoväli puolittuu. Seuraava lause väittää, että enimmäisvirhe on suoraan verrannollinen jakovälin pituuteen, jolloin ainakin enimmäisvirhe puolittuu, kun jakoväli puolittuu.

5.6 Lause. *Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jatkuva ja $M_1 > 0$. Olkoon f lisäksi derivoituva välillä $]a,b[$ ja $|f(x)| \le M_1$ kaikilla $x \in]a,b[$. Silloin suorakaidesäännön virhe $E(f)$ toteuttaa*

$$|E(f)| \le \frac{b-a}{2} M_1 h \textit{ kaikilla } n \in \mathbb{N}.$$

Todistus. Differentiaalilaskennan väliarvolauseen mukaan jokaiselle $x \in]x_{j-1}, x_j]$ on olemassa $\xi_j \in]x_{j-1}, x_j[$ siten, että

$$|f(x) - \tilde{f}(x)| = |f(x) - f(x_j)| = \big|f'(\xi_j)(x_j - x)\big| \le M_1(x_j - x).$$

Siten

$$\begin{aligned}
|E(f)| &= \Big|\int_a^b f - \int_a^b \tilde{f}\Big| = \Big|\int_a^b (f - \tilde{f})\Big| \le \int_a^b |f - \tilde{f}| = \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} |f - \tilde{f}| \\
&\le \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} M_1(x_j - x)\,dx = \sum_{j=1}^n M_1 \Big/_{x_{j-1}}^{x_j} \big(x_j x - \frac{1}{2}x^2\big) \\
&= M_1 \sum_{j=1}^n \frac{1}{2}(x_j - x_{j-1})^2 = M_1 \sum_{j=1}^n \frac{1}{2}h^2 = M_1 n \frac{1}{2} h^2 = \frac{b-a}{2} M_1 h.
\end{aligned}$$

m.o.t.

5.4.2 Puolisuunnikassääntö

Valitaan approksimaatiksi $\tilde{f}$ paloittain lineaarinen kuvaus, jolle $\tilde{f}(a) = f(a)$ ja

$$\tilde{f}(x) = f(x_{j-1}) + \frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{h}(x - x_{j-1}), \text{ jos } x \in]x_{j-1}, x_j],\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Tällöin $\tilde{f}(x_j) = f(x_j)$ kaikilla $j = 0, 1, \ldots, n$. Lisäksi

$$\begin{aligned}\int_{x_{j-1}}^{x_j} \tilde{f} &= f(x_{j-1})(x_j - x_{j-1}) + \frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{h} \Big/_{x_{j-1}}^{x_j} \left(\frac{1}{2}x^2 - x_{j-1}x\right) \\ &= f(x_{j-1})h + \frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{h} \cdot \frac{1}{2}h^2 = \frac{f(x_{j-1}) + f(x_j)}{2} \cdot h.\end{aligned}$$

Tämä on tuttu puolisuunnikkaan pinta-alan kaava (keskiarvo reunakorkeuksista $\times$ leveys), joten integraalia approksimoidaan kullakin jakovälillä puolisuunnikkaalla, jonka kärkien kautta funktion f kuvaaja kulkee. Tästä tulee menetelmän nimi *puolisuunnikassääntö*. Sen mukaan

$$\begin{aligned}\int_a^b f &\approx \sum_{j=1}^{n} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \tilde{f} = \sum_{j=1}^{n} \frac{f(x_{j-1}) + f(x_j)}{2} h \\ &= h\Big(\frac{1}{2}f(a) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(b)\Big). \\ &= \frac{h}{2}\big(f(a) + f(b)\big) + h\sum_{j=1}^{n-1} f(a + jh).\end{aligned}$$

5.7 Esimerkki. Lasketaan puolisuunnikassäännöllä $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$, kun $n = 2$, $n = 4$ ja $n = 8$. Saadaan seuraava taulukko.

n	h	$\int_0^1 \tilde{f}$	$E(f)$
2	$\frac{1}{2}$	$0,708333$	$-0,0151862$
4	$\frac{1}{4}$	$0,697024$	$-0,003877$
8	$\frac{1}{8}$	$0,694122$	$-0,000975$

Jakovälin puolittuessa virhe pienenee noin neljäsosaksi, joten virhe näyttää olevan suoraan verrannollinen jakovälin pituuden neliöön.

5.8 Lause. *Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jatkuvasti derivoituva ja $M_2 > 0$. Lisäksi olkoon $f''(x)$ olemassa ja $|f''(x)| \le M_2$ kaikilla $x \in]a,b[$. Silloin puolisuunnikassäännön virhe $E(f)$ toteuttaa*

$$|E(f)| \le \frac{b-a}{12} M_2 h^2 \textit{ kaikilla } n \in \mathbb{N}.$$

Todistus. Sivuutetaan. Todistus on samankaltainen kuin suorakaidesäännön virhearvion todistus. **m.o.t.**

5.4.3 Simpsonin sääntö

Oletetaan, että jakovälien määrä $n \in \mathbb{N}$ on parillinen. Valitaan aproksimaatti $\tilde{f}$ siten, että se on kahden jakovälin paloissa paraabeli, joka ottaa jakopisteissä samat arvot kuin f. Noilla paloilla $\tilde{f}(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, missä kolme kerrointa $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ määräytyy yksikäsitteisesti kolmesta yhtälöstä

$$f(x_j) = \tilde{f}(x_j),\ j = 2l-2, 2l-1, 2l.$$

Tällöin saadaan *Simpsonin sääntö*

$$\begin{aligned}\int_a^b f &\approx \frac{h}{3}\big(f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \ldots \\ &\qquad +2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(b)\big) \\ &= \frac{h}{3}\Big(f(a) + 4\sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + 2\sum_{j=1}^{n/2-1} f(x_{2j}) + f(b)\Big).\end{aligned}$$

5.9 Esimerkki. Lasketaan Simpsonin säännöllä $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$, kun $n = 2$, $n = 4$ ja $n = 8$. Saadaan seuraava taulukko.

n	h	$\int_0^1 \tilde{f}$	$E(f)$
2	$\frac{1}{2}$	$0,694444$	$-0,001297$
4	$\frac{1}{4}$	$0,693254$	$-0,000107$
8	$\frac{1}{8}$	$0,6931545$	$-0,0000074$

Virhe näyttää tulevan noin $1/15$ –osaksi, kun jakoväli puolittuu. Virhe lienee suoraan verrannollinen jakovälin pituuden neljänteen potenssiin.

5.10 Lause. *Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jatkuvasti derivoituva kolme kertaa ja $M_4 > 0$. Lisäksi olkoon $f^{(4)}(x)$ olemassa ja $|f^{(4)}(x)| \le M_4$ kaikilla $x \in]a,b[$. Silloin Simpsonin säännön virhe $E(f)$ toteuttaa*

$$|E(f)| \le \frac{4(b-a)}{45} M_4 h^4 \text{ kaikilla } n \in \mathbb{N}.$$

Todistus. Sivuutetaan. Todistus on samankaltainen kuin suorakaidesäännön virhearvion todistus. **m.o.t.**

5.11 Huomautus. Kohtuullisella laskutikku- tai kynä ja paperi -työskentelyllä päästään hämmästyttävään usean desimaalin tarkkuuteen. Siksi numeerista integrointia ja erityisesti Simpsonin menetelmää käytettiin ahkerasti jo ennen kuin tietokoneet yleistyivät.

OSA II

DIFFERENTIAALIYHTÄLÖITÄ

Luku 6

Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöt

Tässä luvussa opitaan ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälön ja sen ratkaisun käsitteet sekä separointimenetelmä differentiaaliyhtälön ratkaisemiseksi.

Olkoon $\Delta \subset \mathbb{R}$ väli, jolloin on yhdeksän mahdollisuutta:

$$\begin{array}{lllll} \Delta = \mathbb{R}, & \Delta = [a,\infty[, & \Delta =]a,\infty[, & \Delta =]-\infty,b[, & \Delta =]-\infty,b], \\ \Delta =]a,b[, & \Delta = [a,b[, & \Delta = [a,b] \text{ tai} & \Delta =]a,b], & \end{array}$$

missä $a, b \in \mathbb{R}$ ja $a < b$. Merkitään kuvauksen $y\colon \Delta \to \mathbb{R}$ derivaattaa y'.

6.1 Määritelmä. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^3$ ja $F\colon A \to \mathbb{R}$. Yhtälöä*

$$F(t,y,y') = 0 \tag{6.1}$$

sanotaan yleiseksi ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöksi.

6.2 Esimerkkejä.

1. Luonnollisessa kasvussa kasvunopeus on suoraan verrannollinen pääomaan, joten sitä kuvaa yhtälö $y' = \alpha y$ eli $y' - \alpha y = 0$, missä $\alpha > 0$ on jokin vakio ja $y(t)$ esittää pääomaa (esimerkiksi puun massaa) hetkellä t. Kyseessä on ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö, sillä voidaan asettaa $A = \mathbb{R}^3$ ja $F(x_1,x_2,x_3) = x_3 - \alpha x_2$.
2. Yhtälö $y' + y^2 = 0$ on myös ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö, mikä nähdään asettamalla $A = \mathbb{R}^3$ ja $F(x_1,x_2,x_3) = x_3 + x_2^2$.
3. Yhtälö $(y')^2 + 2ty' + t^2 = 0$ on myös ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö, sillä asetetaan $A = \mathbb{R}^3$ ja $F(x_1,x_2,x_3) = x_3^2 + 2x_1x_2 + x_1^2$.

6.3 Määritelmä. *Jos derivaatta y' voidaan lausua muuttajan t ja kuvauksen y avulla eli*

$$y' = f(t,y), \tag{6.2}$$

missä $f\colon B \to \mathbb{R}$ ja $B \subset \mathbb{R}^2$, niin sanotaan, että kyseessä on normaalimuotoinen ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö.

6.4 Esimerkki. Edellisen esimerkin ensimmäinen differentiaaliyhtälö on valmiiksi normaalimuotoinen. Sen kaksi muuta differentiaaliyhtälöä voidaan muuntaa normaalimuotoisiksi ratkaisemalla niistä y':

$$y' = -y^2, \; y' = -t.$$

Differentiaaliyhtälöstä $F(t,y,y') = 0$ tai $y' = f(t,y)$ pyritään ratkaisemaan kuvaus y. Ratkaisun käsite on huolella täsmennettävä.

6.5 Määritelmä. *Kuvausta $y : \Delta \to \mathbb{R}$ sanotaan differentiaaliyhtälön (6.2) ratkaisuksi välillä $\Delta \subset \mathbb{R}$, jos*

1. *derivaatta $y'(t)$ on olemassa jokaisella $t \in \Delta$,*
2. *$\big(t, y(t)\big) \in B$ jokaisella $t \in \Delta$, ja*
3. *$y'(t) = f\big(t, y(t)\big)$ jokaisella $t \in \Delta$.*

Samoin määritellään yleisen ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälön ratkaisu:

6.6 Määritelmä. *Kuvausta $y : \Delta \to \mathbb{R}$ sanotaan differentiaaliyhtälön (6.1) ratkaisuksi välillä $\Delta \subset \mathbb{R}$, jos*

1. *derivaatta $y'(t)$ on olemassa jokaisella $t \in \Delta$,*
2. *$\big(t, y(t), y'(t)\big) \in A$ jokaisella $t \in \Delta$, ja*
3. *$F\big(t, y(t), y'(t)\big) = 0$ jokaisella $t \in \Delta$.*

6.7 Esimerkkejä. 1. Kuvaukset $t \mapsto y(t) = C\,\mathrm{e}^{\alpha t}$, $C \in \mathbb{R}$, ovat luonnollisen kasvuyhtälön $y' = \alpha y$ ratkaisuja välillä $\Delta = \mathbb{R}$, sillä derivointi osoittaa, että kaikki määritelmän 6.5 ehdot totetutuvat.

2. Differentiaaliyhtälön $y' + y^2 = 0$ ratkaisuja välillä $[0, \infty[$ ovat kuvaukset

$$t \mapsto y(t) = \frac{C}{1 + Ct}, \ C \in [0, \infty[,$$

sillä derivointi osoittaa, että kaikki määritelmän 6.6 ehdot toteutuvat.

3. Differentiaalityhtälöllä $(y')^2 + |y| + 1 = 0$ ei ole ratkaisua millään välillä $\Delta \subset \mathbb{R}$, sillä silloin pitäisi olla $y'(t)^2 < 0$.

4. Differentiaaliyhtälön $y' = f$, missä $f(t) = \cos t$ ratkaisuja välillä $\mathbb{R}$ ovat $y = \sin t + C = \int \cos t\, dt$. Muita ratkaisuja välillä $\mathbb{R}$ ei ole, sillä määritelmän 6.5 mukaan ratkaisu on kuvauksen f antiderivaatta. Antiderivaatta on lisättävää vakiota vaille yksikäsitteinen (lause 1.4).

5. Differentiaaliyhtälön $y' = f$, missä $f : \Delta \to \mathbb{R}$ on integroituva (ts. sillä on antiderivaatta) kaikki ratkaisut välillä Δ ovat

$$y(t) = \int f(t)\, dt.$$

6. Differentiaaliyhtälöllä $y' = f$, missä

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(t) = \begin{cases} 0, & \text{jos } t \le 0, \\ 1 & \text{jos } t > 0, \end{cases}$$

ei ole ratkaisua. Jos sillä olisi ratkaisu y, niin

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ y(t) = \begin{cases} C_1, & \text{jos } t < 0, \\ t + C_2 & \text{jos } t > 0, \end{cases}$$

missä $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Tämä ei kuitenkaan ole derivoituva origossa[1].

Miten löydetään kaikki tarkasteltavan differentiaaliyhtälön ratkaisut? Tähän on monia keinoja arvaamisesta alkaen.

6.1 Separointimenetelmä

Tässä alaluvussa tutustutaan separointimenetelmään ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseksi.

6.8 Esimerkkejä. 1. Etsitään differentiaaliyhtälön $y' = y$ ratkaisut välillä $\mathbb{R}$. *Olkoon* y ratkaisu. Jos $y(t) \neq 0$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$ voidaan yhtälö jakaa sillä, jolloin ketjusäännön nojalla

$$1 = \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{d}{dt} \ln |y(t)| \text{ kaikilla } t \in \mathbb{R}.$$

1. Ratkaisun käsitettä voidaan tosin lieventää: vaaditaan, että y on derivoituva melkein kaikkialla ja että y' on Riemann-integroituva. Tällöin f saisi olla esimerkiksi rajoitettu ja paloittain jatkuva.

Integroidaan tämä puolittain[2], jolloin

$$t + \tilde{C} = \ln|y(t)| \text{ eli } y(t) = \pm\,\mathrm{e}^{\tilde{C}+t} = \pm\,\mathrm{e}^{\tilde{C}}\,\mathrm{e}^{t} = C\,\mathrm{e}^{t} \text{ kaikilla } t \in \mathbb{R},$$

missä $\tilde{C} \in \mathbb{R}$ ja $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Derivointi osoittaa, että löydetyt kuvaukset ovat yhtälön $y' = y$ ratkaisuja välillä $\mathbb{R}$. Myös nollakuvaus on ratkaisu, joten sallitaan $C = 0$. Löydettiinkö kaikki ratkaisut? Päättely on muuten tyyppiä $\Rightarrow$, mutta oletettiin, että $y(t) \neq 0$ kaikkialla. Siksi ainakin yhdessä pisteessä nolla-arvoinen kuvaus, joka ei ole nolla kaikkialla, voisi olla löytymättä jäänyt ratkaisu[3].

2. Haetaan samalla menettelyllä differentiaaliyhtälön

$$y' = t^3(1+y^2)$$

ratkaisut välillä $\Delta \subset \mathbb{R}$. Olkoon y sen ratkaisu välillä Δ. Jaetaan yhtälö tekijällä $1 + y^2 > 0$, jolloin ketjusäännön nojalla

$$t^3 = \frac{y'(t)}{1+y(t)^2} = \frac{d}{dt}\arctan y(t) \text{ kaikilla } t \in \Delta.$$

Integroimalla puolittain saadaan

$$\frac{1}{4}t^4 + C = \arctan y \text{ eli } y = \tan\big(\frac{1}{4}t^4 + C\big) \text{ kaikilla } t \in \Delta.$$

On vaadittava, että tangentin muuttuja on välillä $]-\pi/2, \pi/2[$ (tai välillä $]\pi/2, 3\pi/2[$ tai $\ldots$). Näin vakiota C rajoittaa väli Δ. Derivointi osoittaa, että löydetyt y ovat kyseisen differentiaaliyhtälön ratkaisuja. Muita ratkaisuja ei ole, sillä laskussa oletettiin vain, että y on ratkaisu.

3. Tehdään edellisen esimerkin lasku käsittelemällä derivaattaa osamääränä:

$$\frac{dy}{dt} = t^3(1+y^2) \quad \text{"}\Rightarrow\text{"} \quad \frac{dy}{1+y^2} = t^3 dt \quad \text{"}\Rightarrow\text{"} \quad \int \frac{dy}{1+y^2} = \int t^3 dt$$
$$\Rightarrow \quad \arctan y = \frac{1}{4}t^4 + C \quad \Rightarrow \quad y = \tan\big(\frac{1}{4}t^4 + C\big).$$

Huomaa, että tämä on kätevä muistisääntö ja lyhennysmerkintä kuten samanlainen kirjoitustapa muuttujanvaihtolauseen soveltamisessa.

Yllä olevissa esimerkeissä käytettyä menetelmää sanotaan *separointimenetelmäksi*, koska siinä erotellaan muuttujat y ja t eri puolille yhtälöä.

6.9 Määritelmä. *Olkoot $\Delta, I \subset \mathbb{R}$ avoimia välejä ja $f\colon \Delta \to \mathbb{R}$, $g\colon I \to \mathbb{R}$ jatkuvia. Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöä*

$$y'(t) = f(t)g(y) \tag{6.3}$$

sanotaan separoituvaksi.

Tarkastellaan separoituvaa yhtälöä (6.3) Merkitään kuvauksen $y \mapsto 1/g(y)$ integraalifunktiota $G(y)$. Se on olemassa ja derivoituva, jos $g(y) \neq 0$ välillä I. Silloin differentiaaliyhtälöstä (6.3) saadaan separointimenetelmällä

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(t)\,dt \text{ eli } G(y) = F(t) + C,\ t \in \Delta, \tag{6.4}$$

2. Haetaan siis vasemman ja oikean puolen antiderivaatat. Yhtälön ja antiderivaatan yksikäsitteisyystuloksen nojalla ne ovat samat lisättävää vakiota vaille.
3. Sellaista ei kuitenkaan ole olemassa, sillä Gronwallin epäyhtälön nojalla alkuarvotehtävällä $y' = y,\ y(t_0) = 0$, on vain yksi ratkaisu, ks. esimerkki 6.14.3.

missä $C \in \mathbb{R}$ ja F on kuvauksen f integraalifunktio. Yhtälöä $G(y) = F(t) + C$ sanotaan differentiaaliyhtälön (6.3) *implisiittiseksi ratkaisuksi*. Jos kuvauksella G on käänteiskuvaus, niin yhtälön (6.3) *eksplisiittinen ratkaisu* on

$$y(t) = G^{-1}\Big(\int f(t)\,dt\Big) \text{ kaikilla } t \in \Delta. \tag{6.5}$$

On kuitenkin kaksi pulmaa: käänteiskuvausta ei ole tai sitä ei osata laskea. Lisäksi pelkkä separointimenetelmän soveltaminen ei takaa, että löydetty ratkaisukandidaatti on ratkaisu. Yhtälöstä (6.5) nähdään, että siihen riittää, että käänteiskuvaus G^{-1} on olemassa ja derivoituva[4]. Käytännössä on kätevintä tarkastaa derivoiden, että ratkaisukandidaatti on ratkaisu, sillä samalla mahdolliset laskuvirheet paljastuvat.

6.10 Esimerkki.
Ratkaistaan differentiaaliyhtälö

$$y' = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{y}}$$

välillä $\mathbb{R}$. Muuttujien separointi ja integrointi puolittain antavat

$$\int (1 + \mathrm{e}^{y})\,dy = \int 1\,dt \quad \text{eli} \quad y + \mathrm{e}^{y} = t + C \text{ kaikilla } t \in \mathbb{R},$$

missä $C \in \mathbb{R}$. Kuvaus $y \mapsto y + \mathrm{e}^{y}$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on aidosti kasvava, jatkuva ja

$$\lim_{x \to \pm\infty} (x + \mathrm{e}^{x}) = \pm\infty,$$

joten sillä on käänteiskuvaus. Kuitenkaan implisiittisestä ratkaisusta

$$y(t) + \mathrm{e}^{y(t)} = t + C,\ t \in \mathbb{R},$$

ei osata ratkaista lukua $y(t)$ kullekin $t \in \mathbb{R}$.

6.2 Alkuarvotehtävät

Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöllä on tavallisesti äärettömän monta eri ratkaisua. Niinpä on varaa asettaa lisäehto ratkaisuille.

6.11 Määritelmä. *Olkoon $B \subset \mathbb{R}^2$, $f\colon B \to \mathbb{R}$, $(t_0, y_0) \in B$ ja $\Delta \subset \mathbb{R}$ siten, että $t_0 \in \Delta$. Yhtälöön $y' = f(t,y)$ liittyy alkuarvotehtävä*

$$y' = f(t,y),\ y(t_0) = y_0, \tag{6.6}$$

missä on haettava sellainen yhtälön $y' = f(t,y)$ ratkaisu välillä Δ, joka toteuttaa alkuehdon $y(t_0) = y_0$. Lukua y_0 sanotaan alkuarvoksi ja hetkeä t_0 alkuhetkeksi[5].

6.12 Esimerkkejä.

1. Tarkastellaan puun luonnollista kasvua $y' = \alpha y$, $\alpha > 0$. Hetkellä $t = 0$ puun massa olkoon $y_0 > 0$. Kasvuyhtälön kaikki ratkaisut välillä $\Delta = [0, \infty[$ ovat $t \mapsto y(t) = C\,\mathrm{e}^{\alpha t}$, $C \in \mathbb{R}$. Alkuehto $y(0) = y_0$ kiinnittää parametrin C, sillä $C = y_0$. Alkuarvotehtävällä on tasan yksi ratkaisu: $t \mapsto y(t) = y_0\,\mathrm{e}^{\alpha t}$. Puun luonnollinen kasvu on siis eksponentiaalista.
2. Separointimenetelmällä saadaan, että differentiaaliyhtälön $y' + y^2 = 0$ ratkaisuja välillä $[0, \infty[$ ovat ainakin kuvaukset $y(t) = 1/(t + C)$, $C > 0$. Lisäksi nollakuvaus on ratkaisu. Näistä alkuehdon $y(0) = 1$ toteuttaa on tasan yksi ratkaisu välillä $[0, \infty[$: $t \mapsto y(t) = 1/(1 + t)$.

---

4. Käänteiskuvauslauseen nojalla näin on, jos g on jatkuva ja nollasta eroava kaikkialla.
5. Puhe alkuarvosta on teknistä. Luontevammin voitaisiin puhua alkuarvotehtävästä, jos $t_0 = \min \Delta$, loppuarvotehtävästä, jos $t_0 = \max \Delta$, ja muulloin väliarvotehtävästä.

3. Tarkastellaan seuraavaksi luonnotonta kasvua[6]. Haetaan alkuarvotehtävän $y' = y^2$, $y(0) = 1$, ratkaisua välillä $[0, 2]$. Olkoon y ratkaisu. Koska $y' = y^2 \geq 0$ ja $y(0) = 1$, niin $y(t) \geq 1$ kaikilla $t \geq 0$. Niinpä separointimenetelmällä saadaan, että välillä $[0, 2]$ ratkaisu toteuttaa $-\frac{1}{y} = t + C$, missä $C \in \mathbb{R}$. Alkuehto antaa $-1 = 0 + C = C$, joten ratkaisuksi tulee

$$y(t) = \frac{1}{1-t} \text{ kaikilla } t \in [0, 2].$$

Tämä y ei ole jatkuva, joten jossakin on virhe. Se on vain oletuksessa, että ratkaisu on olemassa. Niinpä ratkaisua ei ole olemassa koko välillä $[0, 2]$. Välillä $[0, 1[$ ratkaisu on $y(t) = 1/(1-t)$. Huomaa, että kasvu yhtälön $y' = y^2$ mukaan on niin nopeaa, että aika loppuu kesken.

Tarvitaan keino selvittää, onko separointimenetelmällä tai muuten löydetty *kaikki* differentiaaliyhtälön ratkaisukandidaatit. Sen tiedon avulla selviää samalla, montako ratkaisua kullakin alkuarvotehtävällä on. Siihen sopii seuraava tulos.

6.13 Apulause. *(Gronwallin-Bellmanin lemma tai Gronwallin epäyhtälö.) Olkoot $M \geq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, ja $\phi, \eta \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ jatkuvia siten, että*

$$\eta(t) \geq 0 \;\; \textit{ja} \;\; \phi(t) \leq M + \int_a^t \eta(s)\phi(s)\,ds \;\; \textit{kaikilla} \; t \in [a, b].$$

Silloin

$$\phi(t) \leq M \exp \int_a^t \eta(s)\,ds \;\; \textit{kaikilla} \; t \in [a, b].$$

Todistus. Määritellään apukuvaukset $\psi, \tilde{\psi} \colon [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$\psi(t) = M + \int_a^t \eta(s)\phi(s)\,ds, \;\; \tilde{\psi}(t) = \psi(t) \exp\Big(- \int_a^t \eta(s)\,ds \Big),$$

jotka ovat derivoituvia. Oletuksen mukaan

$$\psi'(t) = \eta(t)\phi(t) \leq \eta(t)\psi(t) \text{ kaikilla } t \in]a, b[.$$

Siten

$$\tilde{\psi}'(t) = \big(\psi'(t) - \eta(t)\psi(t)\big) \exp\Big(- \int_a^t \eta(s)\,ds \Big) \leq 0 \text{ kaikilla } t \in]a, b[.$$

Täten $t \mapsto \tilde{\psi}(t)$ on vähenevä, joten $\tilde{\psi}(t) \leq \tilde{\psi}(a) = M$ kaikilla $t \in [a, b]$. Oletuksen mukaan

$$\phi(t) \leq \psi(t) = \tilde{\psi}(t) \exp \int_a^t \eta(s)\,ds \leq M \exp \int_a^t \eta(s)\,ds \text{ kaikilla } t \in [a, b].$$

m.o.t.

6.14 Esimerkkejä. 1. Olkoon jatkuva kuvaus $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ sellainen, että

$$0 \leq f(t) \leq \int_0^t 99 f(s)\,ds \text{ kaikilla } t \in [0, 1]$$

Gronwallin epäyhtälössä on tällöin $M = 0$ ja $\eta(t) = 99$, joten

$$0 \leq f(t) \leq 0 \cdot \mathrm{e}^{99t} = 0 \text{ kaikilla } t \in [0, 1].$$

Siten $f(t) = 0$ kaikilla $t \in [0, 1]$.

6. Luonnottomasti voi kasvaa pörssiosakkeen hinta tai narkomaanin huumeenkulutus.

2. Tarkastellaan alkuarvotehtävää $y' = \alpha y$, $y(0) = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, välillä $[0, \infty[$. Heti nähdään, että nollakuvaus on yksi sen ratkaisu. Onko muita? Olkoon y sen ratkaisu. Silloin y' $(= \alpha y)$ on jatkuva, ja lauseen 3.8 nojalla

$$|y(t)| = \Big|y(0) + \int_0^t y'(s)\,ds\Big| = \Big|\int_0^t \alpha y(s)\,ds\Big| \leq 0 + \int_0^t |\alpha| \cdot |y(s)|\,ds$$

kaikilla $t \geq 0$. Gronwallin epäyhtälön nojalla $|y(t)| \leq 0 \cdot \mathrm{e}^{|\alpha| t} = 0$ kaikilla $t \geq 0$. Siten nollakuvaus on ainoa ratkaisu.

3. Osoitetaan, että kaikki differentiaaliyhtälön $y' = \alpha y$, $\alpha \in \mathbb{R}$, ratkaisut välillä $[0, \infty[$ ovat $y(t) = C\,\mathrm{e}^{\alpha t}$, $C \in \mathbb{R}$. Olkoon y jokin ratkaisu välillä $\mathbb{R}$. Silloin $y - z$, missä $z(t) = y(0)\,\mathrm{e}^{\alpha t}$, on yksi edellisen kohdan alkuarvotehtävän ratkaisu. Koska se on yksikäsitteinen ja nollakuvaus, niin $y(t) = z(t) = y(0)\,\mathrm{e}^{\alpha t}$ kaikilla $t \geq 0$.

4. Tarkastellaan alkuarvotehtävää

$$y' = y^2 \;\text{ ja }\; y(0) = 0.$$

välillä $[0, T]$, $T > 0$. Heti nähdään, että yksi sen ratkaisu on nollakuvaus $t \mapsto 0$. Onko muita? Oletetaan, että olisi ainakin yksi, jota merkitään y. Kuvaus $t \mapsto |y(t)| : [0, T] \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja sen määrittelyjoukko on suljettu ja rajoitettu joten Weierstraßin lauseen nojalla sillä on suurin arvo. Siis on olemassa $N > 0$ siten, että $|y(t)| \leq N$ kaikilla $t \in [0, T]$. Koska y' on jatkuva, niin lauseen 3.8 mukaan integroidaan differentiaaliyhtälö puolittain välin $[0, t]$ yli ja käytetään alkuehtoa. Silloin

$$|y(t)| = |y(t) - y(0)| = \Big|\int_0^t y'(s)\,ds\Big| = \int_0^t y^2(s)\,ds \leq \int_0^t N|y(s)|\,ds$$

kaikilla $t \in [0, T]$. Gronwallin epäyhtälön nojalla $0 \leq |y(t)| \leq 0$ eli $y(t) = 0$ kaikilla $t \in [0, T]$. Siten nollakuvaus on ainoa kyseisen alkuarvotehtävän ratkaisu.

5. Tarkastellaan alkuarvotehtäviä

$$y' = f(y),\; y(0) = y_0 \;\text{ ja }\; z' = f(z),\; z(0) = z_0,$$

missä $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$ ja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on Lipschitzin-jatkuva vakiolla[7] $L > 0$. Oletetaan, että välillä $[0, T]$, $T > 0$, näillä on ratkaisut y ja z. Silloin $y' - z' = f(y) - f(z)$ on jatkuva, mistä integroimalla yli välin $[0, t] \subset [0, T]$ saadaan, että

$$\begin{aligned}|y(t) - z(t)| &= \Big|y(0) - z(0) + \int_0^t \Big(f\big(y(s)\big) - f\big(z(s)\big)\Big)\,ds\Big| \\ &\leq |y(0) - z(0)| + \int_0^t \big|f\big(y(s)\big) - f\big(z(s)\big)\big|\,ds \\ &\leq |y_0 - z_0| + \int_0^t L|y(s) - z(s)|\,ds \text{ kaikilla } t \in [0, T].\end{aligned}$$

Gronwallin epäyhtälön nojalla

$$|y(t) - z(t)| \leq |y_0 - z_0|\,\mathrm{e}^{Lt} \text{ kaikilla } t \in [0, T]. \tag{6.7}$$

Jos $y_0 = z_0$, niin $y(t) = z(t)$ kaikilla $t \in [0, T]$ eli alkuarvotehtävän $y' = f(y)$, $y(0) = y_0$ ratkaisu on yksikäsitteinen. Kaava (6.7) kertoo enemmän: alkuarvotehtävän ratkaisu riippuu peräti Lipschitzin-jatkuvasti alkuarvosta (vakio on e^{LT}).

---

7. On siis olemassa $L > 0$ siten, että $|f(u) - f(v)| \leq L|u - v|$ kaikilla $u, v \in \mathbb{R}$.

6. Tarkastellaan alkuarvotehtävää

$$y' = \sqrt{|y|},\ y(0) = 0,$$

välillä $[0, \infty[$. Sillä on äärettömän monta ratkaisua:

$$y(t) = 0 \ \text{ ja } \ y(t) = \begin{cases} 0, & \text{jos } 0 \le t \le c, \\ \frac{1}{4}(t-c)^2, & \text{jos } t > c, \end{cases}$$

missä $c > 0$. Kuvaus $y \mapsto \sqrt{|y|}$ ei ole Lipschitzin-jatkuva eikä origon lähellä voida arvioida $\sqrt{|y|} \le N|y|$ kuten kahdessa edellisessä kohdassa oli.

6.3 Lineaariset differentiaaliyhtälöt

Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöä $y' + p(t)y = 0$ sanotaan *lineaariseksi ja homogeeniseksi*, jos $p\colon \Delta \to \mathbb{R}$.

6.15 Lause. *Olkoon $p\colon \Delta \to \mathbb{R}$ jatkuva ja $t_0 \in \Delta$. Silloin kaikki homogeenisen lineaarisen differentiaaliyhtälön $y' + py = 0$ ratkaisut välillä Δ ovat*

$$y(t) = C\,\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds},\ t \in \Delta,\ C \in \mathbb{R}.$$

Todistus. Derivointi osoittaa, että kaikki nämä kuvaukset ovat ratkaisuja. Se, että muita ei ole, osoitetaan helpoiten Gronwallin epäyhtälön avulla. Huomaa, että ratkaisun kaava löydetään myös separointimenetelmällä. **m.o.t.**

6.16 Esimerkki. Differentiaaliyhtälön

$$y' + \frac{1}{1+t^2}y = 0$$

kaikki ratkaisut välillä $\mathbb{R}$ ovat

$$y(t) = C\exp\int_0^t -\frac{1}{1+s^2}\,ds = C\,\mathrm{e}^{-\arctan t},\ C \in \mathbb{R}.$$

Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöä $y' + p(t)y = q$ sanotaan *lineaariseksi ja epähomogeeniseksi*, jos $p, q\colon \Delta \to \mathbb{R}$ ja q ei ole nollakuvaus.

6.17 Lause. *Olkoot $p, q\colon \Delta \to \mathbb{R}$ jatkuvia ja $t_0 \in \Delta$. Silloin kaikki epähomogeenisen lineaarisen differentiaaliyhtälön $y' + py = q$ ratkaisut välillä Δ ovat*

$$y(t) = C\,\mathrm{e}^{-P(t)} + \mathrm{e}^{-P(t)}\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{P(s)}\,q(s)\,ds,\ t \in \Delta, \tag{6.8}$$

missä $C \in \mathbb{R}$ ja $P(t) = \int_{t_0}^{t} p(s)\,ds$.

Todistus. Koska sekä p että q ovat jatkuvia, niin derivointi osoittaa, että kaavan (6.8) y on ratkaisu. Se, että muita ratkaisuja ei ole, perustellaan Gronwallin epäyhtälöllä. **m.o.t.**

6.18 Huomautus. 1. Kaavan (6.8) voi johtaa yritteellä $y(t) = C(t)\,\mathrm{e}^{-P(t)}$, joka derivoidaan ja sijoitetaan differentiaaliyhtälöön. Tällöin lähdetäään homogeenisen yhtälön ratkaisusta, mutta annetaan vakion C riippua muuttujasta t. Tätä menettelyä kutsutaan *vakion varioimiseksi.*

2. Kaavaa (6.8) sanotaan *vakion varioimiskaavaksi.*

3. Kaava (6.8) antaa oitis alkuarvotehtävän $y' + py = q$, $y(t_0) = y_0$, ratkaisun välillä Δ, kun sijoitetaan $C = y_0$.

6.19 Esimerkki. Epähomogeeniselle lineaariselle yhtälölle $y' + ty = t$ pätee $p(t) = t = q(t)$ ja $P(t) = \frac{1}{2}t^2$, joten sen ratkaisut välillä $\mathbb{R}$ ovat

$$\begin{aligned} y(t) &= C\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2} \int_0^t \mathrm{e}^{\frac{1}{2}s^2} s\,ds = C\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2} \Big/_0^t \mathrm{e}^{\frac{1}{2}s^2} \\ &= (C-1)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2} + 1 = \tilde{C}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2} + 1, \end{aligned}$$

missä $C, \tilde{C} \in \mathbb{R}$.

6.20 Lause. *Olkoot $p, q\colon \Delta \to \mathbb{R}$ jatkuvia. Olkoon y_e jokin epähomogeenisen lineaarisen differentiaaliyhtälön $y' + py = q$ ratkaisu välillä Δ ja y_h jokin homogeenisen lineaarisen differentiaaliyhtälön $y' + py = 0$ epätriviaali*[8] *ratkaisu välillä Δ. Tällöin kaikki yhtälön $y' + py = q$ ratkaisut välillä Δ ovat $y = y_e + Cy_h$, $C \in \mathbb{R}$.*

Todistus. Derivointi antaa, että

$$y' + py = \underbrace{y_e' + py_e}_{=q} + C(\underbrace{y_h' + py_h}_{=0}) = q + C \cdot 0 = q.$$

Gronwallin epäyhtälön avulla näytetään, että muita ratkaisuja ei ole. **m.o.t.**

6.21 Huomautus. Homogeenisen lineaarisen differentiaaliyhtälön ratkaisut muodostavat yksiulotteiseen vektorialiavaruuden kaikkien välillä Δ määriteltyjen funktioiden muodostamassa vektoriavaruudessa. Epähomogeenisen lineaarisen differentiaaliyhtälön ratkaisut muodostavat siinä yksiulotteisen tason, joka kulkee pistee y_e kautta.

6.22 Esimerkkejä. Olkoon $p \in \mathbb{R}$ ja $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Tarkastellaan vakiokertoimista lineaarista ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöä $y' + py = q$.

1. Vakiokertoimisen homogeenisen lineaarisen differentiaaliyhtälön $y' + py = 0$ ratkaisut löydetään myös yritteellä $y(t) = \mathrm{e}^{rt}$. Silloin

   $$y'(t) + py(t) = r\,\mathrm{e}^{rt} + p\,\mathrm{e}^{rt} = (r+p)\,\mathrm{e}^{rt} = 0,$$

   jos $r + p = 0$ eli $r = -p$. Siten ratkaisut välillä $\mathbb{R}$ ovat $y(t) = C\,\mathrm{e}^{-pt}$, $C \in \mathbb{R}$.
2. Haetaan epähomogeenisen yhtälön $y' + py = t^2 + 1$ kaikki ratkaisut välillä $\mathbb{R}$. Homogeenisen yhtälön epätriviaali ratkaisu on e^{-pt}. Epähomogeenisen yhtälön yhden ratkaisun y_e löytämiseksi tehdään ***yrite*** $y_e(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$. Silloin

   $$\begin{aligned} y_e'(t) + py_e(t) &= 2\alpha t + \beta + p(\alpha t^2 + \beta t + \gamma) \\ &= p\alpha t^2 + (\alpha + p\beta)t + (\beta + \gamma) = t^2 + 1 \text{ kaikilla } t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

   jos

   $$\begin{cases} p\alpha = 1 \\ \alpha + p\beta = 0 \\ \beta + p\gamma = 1 \end{cases} \text{eli} \quad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{p} \\ \beta = -\frac{2}{p^2} \\ \gamma = \frac{p^2+2}{p^3}. \end{cases}$$

   Siten yhtälön $y' + py = t^2 + 1$ kaikki ratkaisut välillä $\mathbb{R}$ ovat

   $$y(t) = C\,\mathrm{e}^{-pt} + \frac{1}{p}t^2 - \frac{2}{p^2}t + \frac{p^2+2}{p^3}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

8. Eli y_h ei ole nollakuvaus.

3. Epähomogeenisen yhtälön $y' + py = \sin t$ ratkaisemiseksi välillä $\mathbb{R}$ arvataan, että yksi sen ratkaisu on $y_e(t) = \alpha \sin t + \beta \cos t$ joillakin $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Silloin

$$\begin{aligned} y_e' + py_e &= \alpha \cos t - \beta \sin t + p(\alpha \sin t + \beta \cos t) \\ &= (-\beta + p\alpha) \sin t + (\alpha + p\beta) \cos t = \sin t, \end{aligned}$$

jos

$$\begin{cases} \beta + p\alpha = 1 \\ \alpha + p\beta = 0 \end{cases} \quad \text{eli} \quad \begin{cases} \alpha = \frac{p}{1+p^2} \\ \beta = -\frac{1}{1+p^2}. \end{cases}$$

Yhtälön $y' + py = \sin t$ kaikki ratkaisut välillä $\mathbb{R}$ ovat siten

$$y(t) = C\,\mathrm{e}^{-pt} + \frac{p}{1+p^2} \sin t - \frac{1}{1+p^2} \cos t, \;\; C \in \mathbb{R}.$$

Luku 7

Toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöt

Tässä luvussa tutustutaan toisen kertaluvun yleisiin ja lineaarisiin differentiaaliyhtälöihin.

7.1 Määritelmä. *Olkoon* $A \subset \mathbb{R}^4$ *ja* $F : A \to \mathbb{R}$. *Yhtälö*

$$F(t, y, y', y'') = 0 \tag{7.1}$$

on (yleinen) toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö.

7.2 Määritelmä. *Olkoot* $p, q, r : \Delta \to \mathbb{R}$, *missä* $\Delta \subset \mathbb{R}$ *on väli. Yhtälö*

$$y'' + py' + qy = r \tag{7.2}$$

on toisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö. Se on homogeeninen, jos r *on nollakuvaus. Muutoin se on epähomogeeninen. Jos kuvaukset* p *ja* q *ovat vakioita, niin sanotaan, että (7.2) on vakiokertoiminen.*

7.3 Esimerkkejä.

1. Tarkastellaan kitkatonta heiluria tasaisessa painovoimakentässä. Heilurin pituus olkoon l ja vapaan putoamisliikkeen kiihtyvyys g. Esittäköön $y(t)$ heilurin heilahduskulmaa hetkellä t. Klassisen mekaniikan mukaan heilurin liikeyhtälö on

$$y'' + \frac{g}{l}\sin y = 0. \tag{7.3}$$

Yhtälö (7.3) on toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö, mutta se ei ole lineaarinen siniterminsä vuoksi.

2. Oletetaan, että heilurin heilahduskulma on koko ajan pieni. Silloin $\sin y(t) \approx y(t)$, ja heilurin liikeyhtälö on likimain $y'' + (g/l)y = 0$, joka on vakiokertoiminen, lineaarinen ja homogeeninen.
3. Tarkastellaan kappaletta, jonka sijainti kitkattomalla vaakasuoralla pinnalla hetkellä t on $y(t)$ ja joka on kiinnitetty lineaariseen jouseen. Silloin kappaleeseen vaikuttavat jousivoima $F_j = -ky(t)$ ja kitkavoima $F_f = -\gamma y'(t)$, missä verrannollisuuskertoimet $k, \mu \geq 0$ ovat vakioita. Jousivoima on siis suoraan verrannollinen kappaleen siirtymään ja se pyrkii palauttamaan kappaleen origoon. Kitkavoima on suoraan verronnollinen kappaleen nopeuteen. Vaikuttakoon vielä kappaleeseen ulkoinen voima F_p. Kappaleen liikeyhtälö on $my'' = F_j + F_v + F_p$ eli

$$y'' + \gamma y' + \omega^2 y = \frac{F_p}{m}, \tag{7.4}$$

missä $\omega = \sqrt{(k/m)}$ ja $\gamma = \mu/m$. Tämä differentiaaliyhtälö on lineaarinen ja vakiokertoiminen. Jos $F_p \neq 0$, se on epähomogeeninen.

On kaksi tilannetta, joissa toisen kertaluvun yhtälö palautuu ensimmäisen kertaluvun yhtälöksi.

7.4 Esimerkkejä. 1. Differentiaaliyhtälö $G(t, y', y'') = 0$ on ensimmäisen kertaluvun yhtälö kuvauksen y' suhteen. Voidaan siis ensin ratkaista kuvausta y' ensimmäisen kertaluvun yhtälöiden menetelmillä. Jos siinä onnistutaan, on ratkaisu $y = \int y'\,dt$.

2. Tarkastellaan heilurin liikeyhtälöä (7.3) alkuehdoin $y'(0) = 0$ ja $y(0) = y_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Kerrotaan yhtälö (7.3) derivaatalla y' ja integroidaan puolittain. Silloin saadaan

$$\frac{1}{2}y'^2 - \frac{g}{l}\cos y = C,$$

missä C on vakio. Sijoitetaan alkuehdot, jolloin $C = -\frac{g}{l}\cos y_0$. Koska on ilmeistä, että $y' < 0$, niin $y' = -\sqrt{2g/l}\,\sqrt{\cos y - \cos y_0}$. Separointimenetelmällä saadaan

$$\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_y^{y_0}\frac{1}{\sqrt{\cos u - \cos y_0}}\,du = t.$$

Tämä on vain implisiittinen ratkaisu, ja sellaisenakin erityisen hankala, koska siinä esiintyvää integraalia ei voi laskea. Silti saatiin heilurin heilahdusaika P:

$$P = \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{-y_0}^{y_0}\frac{1}{\sqrt{\cos u - \cos y_0}}\,du \propto \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Yleistetään menettely. Toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö $y'' = f(t, y)$ kerrotaan derivaatalla y' ja integroidaan puolittain. Näin päästään ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöön.

Määritellään huolella toisen kertaluvun differentiaaliyhtälön ratkaisu.

7.5 Määritelmä. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^4$, $F: A \to \mathbb{R}$ ja $\Delta \subset \mathbb{R}$ väli. Kuvausta $y : \Delta \to \mathbb{R}$ sanotaan differentiaaliyhtälön $F(t, y, y'y'') = 0$ ratkaisuksi välillä Δ, jos*

1. *derivaatat $y'(t)$ ja $y''(t)$ ovat olemassa jokaisella $t \in \Delta$,*
2. *$\big(t, y(t), y'(t), y''(t)\big) \in A$ jokaisella $t \in \Delta$, ja*
3. *$F\big(t, y(t), y'(t), y(t)\big) = 0$ jokaisella $t \in \Delta$.*

7.6 Esimerkki. Jatketaan esimerkin 7.3.3 järjestelmän tarkastelua. Oletetaan, että ulkoista voimaa ei ole, jolloin on tutkittava lineaarista vakiokertoimista ja homogeenista differentiaaliyhtälöä

$$y'' + \gamma y' + \omega^2 y = 0,$$

Sen ratkaisut välillä $\Delta = \mathbb{R}$ löydetään sen ***karakteristisen yhtälön*** $r^2 + \gamma r + \omega^2 = 0$ avulla: sijoitetaan yhtälöön yrite $y(t) = \mathrm{e}^{rt}$, jolloin paljastuu, että yrite kelpaa, jos karakteristinen yhtälö toteutuu[1]. On tasan kolme mahdollisuutta.

1. Karakteristisen yhtälön juuret

$$r_1 = \frac{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2}}{2} \quad \text{ja} \quad r_2 = \frac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2}}{2}$$

ovat erisuuret reaaliluvut r_1 ja r_2. Näin käy, jos $\gamma > 2\omega$ eli kitkavoima voittaa jousivoiman. Tällöin kuvaukset $\mathrm{e}^{r_1 t}$ ja $\mathrm{e}^{r_2 t}$ ovat ratkaisuja ja ne ovat

---

1. Laskussa on käytettävä kompleksista eksponenttikuvausta, jonka määrittelee kaava

$$\mathrm{e}^{x+iy} = \mathrm{e}^{x}\big(\cos y + i\sin y\big) \text{ kaikilla } x, y \in \mathbb{R}.$$

Kompleksiarvoisen kuvauksen derivaatta määritellään sen reaaliosan derivaatan ja imaginaariosan derivaattojen summana: jos $f, g: \Delta \to \mathbb{R}$, niin $(f + ig)' = f' + ig'$. Näin ollen

$$\frac{d}{dt}\mathrm{e}^{(x+iy)t} = \frac{d}{dt}\mathrm{e}^{xt}\cos yt + i\frac{d}{dt}\mathrm{e}^{xt}\sin yt = \cdots = (x+iy)\,\mathrm{e}^{(x+iy)t} \text{ kaikilla } x, y, t \in \mathbb{R}.$$

lineaarisesti riippumattomia[2]. Yhtälön lineaarisuuden vuoksi kaikki niiden lineaariyhdisteet ovat myös ratkaisuja:

$$t \mapsto y(t) = C_1 \mathrm{e}^{r_1 t} + C_2 \mathrm{e}^{r_2 t}, \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{7.5}$$

2. Karakteristisen yhtälön juuri on kaksinkertainen ja reaaliluku r_1. Näin käy, jos $\gamma = 2\omega$. Tällöin yksi ratkaisu on $\mathrm{e}^{r_1 t}$. Entä muut ratkaisut?
3. Karakteristisen yhtälön juuret ovat imaginaariset. Näin käy, jos $\gamma < 2\omega$ eli jousivoima voittaa vastusvoiman. Tällöin ratkaisuja ovat[3]

$$t \mapsto y(t) = C_1 \mathrm{e}^{-\tilde{\gamma} t} \cos \tilde{\omega} t + C_2 \mathrm{e}^{-\tilde{\gamma} t} \sin \tilde{\omega} t, \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \tag{7.6}$$

missä $\tilde{\gamma} = \gamma/2$ ja $\tilde{\omega} = \sqrt{4\omega^2 - \gamma^2}/2$.

7.7 Lause. *Olkoot $p, q, r \colon \Delta \to \mathbb{R}$ jatkuvia. Jos y_1 ja y_2 ovat kaksi lineaarisesti riippumatonta homogeenisen yhtälön $y'' + py' + qy = 0$ ratkaisua ja y_e on jokin epähomogeenisen yhtälön $y'' + py' + qy = r$ ratkaisu välillä Δ, niin kaikki epähomogeenisen yhtälön ratkaisut välillä Δ ovat $y = y_e + C_1 y_1 + C_2 y_2$, missä $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.*

Todistus. Sivuutetaan. Todistuksessa käytetään Gronwallin epäyhtälöä. **m.o.t.**

7.8 Esimerkkejä. 1. Jatketaan esimerkin 7.3.3 järjestelmän tarkastelemista. Jos kitkavoima voittaa jousivoiman, niin kaikki ratkaisut antaa kaava (7.5) lauseen 7.7 nojalla. Jos jousivoima voittaa kitkavoiman, niin kaikki ratkaisut saadaan kaavasta (7.6). Rajatapauksessa $\gamma = 2\omega$ pitäisi löytää toinen lineaarisesti riippumaton ratkaisu y_2. Kokeillaan yritettä $y_2(t) = v(t) y_1(t)$, missä $y_1(t) = \mathrm{e}^{r_1 t}$. Lasketaan derivaatat

$$y_2' = v' y_1 + v y_1' \;\text{ ja }\; y_2'' = v'' y_1 + 2v' y_1' + v y_1''.$$

Sijoitetaan ne ja y_2 differentiaaliyhtälöön:

$$\begin{aligned} y_2'' + \gamma y_2' + \omega^2 y_2 &= v'' y_1 + 2v' y_1' + v y_1'' + \gamma (v' y_1 + v y_1') + \omega^2 v y_1 \\ &= v \underbrace{(y_1'' + \gamma y_1' + \omega^2 y_1)}_{=0 \text{ aina}} + v'' y_1 + v' \underbrace{(2y_1' + \gamma y_1)}_{=0 \text{ nyt}} = 0 + v'' y_1 = 0, \end{aligned}$$

jos $v'' = 0$. Se toteutuu, kun $v(t) = t$, joten toinen lineaarisesti riippumaton ratkaisu on $y_2(t) = t\,\mathrm{e}^{r_1 t}$. Lauseen 7.7 nojalla kaikki ratkaisut ovat

$$y(t) = C_1 \mathrm{e}^{r_1 t} + C_2 t \mathrm{e}^{r_1 t}, \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{7.7}$$

Tätä menetelmää toisen ratkaisun löytämiseksi sanotaan *kertaluvun pudottamiseksi*. Se toimii myös sellaisilla lineaarisilla yhtälöillä, jotka eivät ole vakiokertoimisia.

2. Haetaan kaikki differentiaaliyhtälön $y'' + y = t$ ratkaisut välillä $\mathbb{R}$. Arvataan, että yksi niistä on $y_e(t) = t$. Homogeenisen yhtälön $y'' + y = 0$ karakteristinen yhtälö on $r^2 + 1 = 0$. Sen ratkaisut ovat $0 \pm i \cdot 1$, joten kaksi homogeenisen yhtälön lineaarisesti riippumatonta ratkaisua on

$$\mathrm{e}^{0t} \cos 1t = \cos t \;\text{ ja }\; \mathrm{e}^{0t} \sin 1t = \sin t.$$

Lauseen 7.7nojalla yhtälön $y'' + y = t$ kaikki ratkaisut välillä $\mathbb{R}$ ovat

$$y(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + t, \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

---

2. Eli yhtälöstä $\lambda_1 \mathrm{e}^{r t} + \lambda_2 \mathrm{e}^{r_2 t} = 0$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$ seuraa $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
3. Kaksi ratkaisua on $\mathrm{e}^{r_1 t}$ ja $\mathrm{e}^{r_2 t}$. Koska differentiaaliyhtälö on lineaarinen, niin lineaariyhdisteet

$$\frac{1}{2} \mathrm{e}^{r_1 t} + \frac{1}{2} \mathrm{e}^{r_2 t} = \mathrm{e}^{-\tilde{\gamma} t} \cos \tilde{\omega} t \;\text{ ja }\; \frac{1}{2i} \mathrm{e}^{r_1 t} - \frac{1}{2i} \mathrm{e}^{r_2 t} = \mathrm{e}^{-\tilde{\gamma} t} \sin \tilde{\omega} t$$

ovat myös ratkaisuja.

Toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöön välillä $\Delta \subset \mathbb{R}$ liitetään tavallisesti *kaksi* alkuehtoa

$$y(t_0) = y_0 \text{ ja } y'(t_0) = y_1,$$

missä $t_0 \in \Delta$ ja $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$.

7.9 Esimerkki. Jatketaan esimerkin 7.3.3 järjestelmän tarkastelemista. Oletetaan, että kappale poikkeutetaan aluksi kohtaan $y_0 \in \mathbb{R}$ ja päästetään siitä irti nopeudella $v_0 \in \mathbb{R}$. Alkuehdot ovat tällöin $y(0) = y_0$ ja $y'(0) = v_0$. Ne määräävät vakiot C_1 ja C_2 kussakin kolmessa tapauksessa (7.5)–(7.6). Todetaan vielä, miten järjestelmä käyttäytyy, kun $t \to \infty$.

1. Jos kitkavoima voittaa jousivoiman, niin r_1 ja r_2 ovat negatiivisia, joten kappale hakeutuu origoon heilahtelematta, kun $t \to \infty$.
2. Jos jousivoima voittaa kitkavoiman, heilahtelee kappale origon ympärillä. Heilahtelun laajuus pienenee eksponentiaalisesti. Kun $t \to \infty$, päätyy kappale origoon. Jos kitkavoimaa ei ole, niin silloin $y(t) = y_0 \cos \omega t + (v_0/\omega) \sin \omega t$, joten kappale heilahtelee iäti.
3. Rajatapauksessa $\gamma = 2\omega$ kappale hakeutuu origoon, kun $t \to \infty$.

Huomaa, että rajatapauksen ratkaisu (7.7) saadaan sekä kitkavoiman dominoiman tapauksen ratkaisusta (7.5) rajalla $\omega \to \gamma/2-$ että jousivoiman dominoiman tapauksen ratkaisusta (7.6) rajalla $\omega \to \gamma/2+$ (harjoitustehtävä).

7.10 Esimerkki. Tarkastellaan vielä kitkaista harmonista oskillaattoria eli esimerkin 7.3.3 järjestelmää. Oletetaan, että punnukseen vaikuttaa jaksollinen voima $F_p = f_0 m \sin \hat{\omega} t$, $f_0 \in \mathbb{R}$, $\hat{\omega} > 0$. On ratkaistava epähomogeeninen yhtälö:

$$y''(t) + \gamma y'(t) + \omega^2 y(t) = f_0 \sin \hat{\omega} t \quad \text{kaikilla } t \in \mathbb{R}. \tag{7.8}$$

Otaksuttavasti pitkän ajan kuluttua ratkaisu riippuu vain punnukseen vaikuttavasta voimasta, ei alkuehdoista. Arvataan siksi, että yksi ratkaisu on $y_e(t) = A \cos \hat{\omega} t + B \sin \hat{\omega} t$, missä $A, B \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$y_e'(t) = -\hat{\omega} A \sin \hat{\omega} t + \hat{\omega} B \cos \hat{\omega} t \quad \text{ja} \quad y_e''(t) = -\hat{\omega}^2 A \cos \hat{\omega} t - \hat{\omega}^2 B \sin \hat{\omega} t.$$

Sijoitetaan y_e derivaattoineen yhtälön (7.8) vasempaan puoleen, jolloin se on

$$(-\hat{\omega}^2 A + \gamma \hat{\omega} B + \omega^2 A) \cos \hat{\omega} t + (-\hat{\omega}^2 B - \gamma \hat{\omega} A + \omega^2 B) \sin \hat{\omega} t.$$

Koska $t \mapsto \cos \hat{\omega} t$ ja $t \mapsto \sin \hat{\omega} t$ ovat lineaarisesti riippumattomia, niin (7.8) toteutuu täsmälleen silloin kun niiden kertoimet ovat samat eli

$$-\hat{\omega}^2 A + \gamma \hat{\omega} B + \omega^2 A = 0 \quad \text{ja} \quad -\hat{\omega}^2 B - \gamma \hat{\omega} A + \omega^2 B = f_0.$$

Ratkaistaan tästä

$$A = -\frac{f_0 \gamma \hat{\omega}}{(\omega^2 - \hat{\omega}^2)^2 + \gamma^2 \hat{\omega}^2} \quad \text{ja} \quad B = \frac{f_0(\hat{\omega}^2 - \omega^2)}{(\omega^2 - \hat{\omega}^2)^2 + \gamma^2 \hat{\omega}^2}. \tag{7.9}$$

Yrite onnistui, ja niin yhtälön (7.8) jokainen ratkaisu välillä $\mathbb{R}$ on

$$y(t) = \mathrm{e}^{-\tilde{\gamma} t} (C_1 \cos \tilde{\omega} t + C_2 \sin \tilde{\omega} t) + A \cos \hat{\omega} t + B \sin \hat{\omega} t, \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{7.10}$$

Ratkaisu (7.10) koostuu kahdesta sinimuotoisesta värähtelystä, joista ensimmäinen riippuu alkuehdoista, vaimenee eksponentiaalisesti ja sen kulmataajuus $\tilde{\omega}$ on pienempi kuin kitkattoman oskillaattorin kulmataajuus ω. Toinen värähtely ei riipu alkuehdoista ja sen kulmataajuus on sama kuin ulkoisen voiman kulmataajuus $\hat{\omega}$. Alkuehdoista riippumatta kitkainen harmoninen oskillaattori päätyy ajan myötä värähtelemään ulkoisen voiman tahtiin.