JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Approbatur 2 A, MAT162
loppukoe 9.3.2005
Vastausaikaa neljä tuntia.
Ei taulukoita, laskin saa olla!

1. Laske integraalit

(a)
$$\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx,$$
(b)
$$\int \arctan x\,dx.$$
Tarkasta kummassakin kohdassa laskusi tulos derivoimalla ja määritä laajin väli, jolla se pätee.

2. (a) Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, ja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ rajoitettu. Selitä, mikä on porrasfunktio, ala $\int_a^b f$ ja ylä $\int_a^b f$. Milloin f on Riemann-integroituva?

(b) Osoita, että
$$2 - \frac{\pi}{4} \leq \int_0^\pi \ln(1+\sin x)\,dx \leq 2.$$

3. Määrittele ja määritä sen tasoalueen pinta-ala, jonka rajaavat käyrä $y = \ln x$ sekä suorat $x = 0$ ja $y = 1$. Piirrä siitä kuva.

4. (a) Osoita, että
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1 + x^{666}\sin\sqrt{x}}\,dx = 0.$$
(b) Hae kaikki differentiaaliyhtälön
$$y' - t(1+y^2) = 0$$
ratkaisut välillä $[0,1]$. Tarkasta derivoimalla, että löytämäsi kuvaukset ovat ratkaisuja välillä $[0,1]$.

5. Hae kaikki alkuarvotehtävän
$$y'' - 5y' + 4y = \sin t,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,$$
ratkaisut välillä $\mathbb{R}$.

Käännä!

Tuloksia, joita saa käyttää:

1. $D \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.
2. $x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.
3. $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ kaikilla $x \geq 0$.
4. Jos f on derivoituva pisteessä $g(x_0)$ ja g pisteessä x_0, niin $f \circ g$ on derivoituva pisteessä x_0 ja $(f \circ g)'(x_0) = f'\big(g(x_0)\big)g'(x_0)$.
5. $D\frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) = \sin^2 x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.
6. Jos f ja g ovat derivoituvia pisteessä $x \in \mathbb{R}$, niin fg on siinä derivoituva ja $(fg)'(x) = Df(x)g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
7. $\mathrm{e} \approx 2,72$.
8. $\lim_{x \to 0+} x \ln x = 0$.
9. $Dx^n = nx^{n-1}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $x \in \mathbb{R}$.
10. $D \ln|x| = \frac{1}{x}$ kaikilla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
11. Jos $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva, niin on olemassa $\xi \in [a,b]$ siten, että
$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$
12. Jos $a \geq b > 0$, niin $0 < \frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$.
13. $D \sin x = \cos x$, $D \cos x = -\sin x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.
14. Olkoot $p, q, r\colon \Delta \to \mathbb{R}$ jatkuvia. Jos y_1 ja y_2 ovat kaksi lineaarisesti riippumatonta homogeenisen yhtälön $y'' + py' + qy = 0$ ratkaisua ja y_e on jokin epähomogeenisen yhtälön $y'' + py' + qy = r$ ratkaisu välillä Δ, niin kaikki epähomogeenisen yhtälön ratkaisut välillä Δ ovat $y = y_e + C_1 y_1 + C_2 y_2$, missä $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
15. $0 \leq \sin x \leq 1$ kaikilla $x \in [0, \pi]$.
16. $\ln \mathrm{e} = 1$.
17. $\arctan\colon \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ on bijektio.
18. Kuvaukset $\sin, \cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ovat lineaarisesti riippumattomia.
19. $3 \cdot 5 = 15$.
20. $25 + 9 = 34$.