JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Approbatur 2 A, MAT162
loppukoe 9.3.2005
Malliratkaisut ja arvosteluperusteet.

Tehtävä 1b. Integroidaan osittain:

$$\int \arctan x\,dx = \int \underbrace{1}_{=f'}\underbrace{\arctan x}_{=g}\,dx = \underbrace{x}_{=f}\underbrace{\arctan x}_{=g} - \int \underbrace{x}_{=f}\underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{=g'}\,dx$$

$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln|\underbrace{1+x^2}_{\geq 1>0}| + C$$

$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C,\ \ C \in \mathbb{R}.$$

(2,0 p. Integrointivakio puuttuu $-0{,}3$ p.). Tarkastus derivoiden (0,4 p.):

$$\frac{d}{dx}\Big(x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C\Big) = (Dx)\arctan x + xD\arctan x$$

$$-\frac{1}{2}\frac{D(1+x^2)}{1+x^2} = \arctan x + x\,\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2} = \arctan x$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$ (0,1 p.). Laajin väli, jolla integraalifunktio saatiin, on siis $I = \mathbb{R}$. (0,5 p.)

Tehtävä 2a. Ks. luennot. Porrasfunktio 0,8 p., ala $\int_a^b f$ 0,8 p., ylä $\int_a^b f$ 0,7 p. ja integroituvuuden määrittelevä ehto tai mikä hyvänsä riittävä ehto (esim. f on jatkuva koko välillä päätepisteitä myöten) 0,7 p.

Tehtävä 2b. Koska $0 \leq \sin x \leq 1$ kaikilla $x \in [0,\pi]$, niin (0,8 p.)

$$\sin x - \frac{\sin^2 x}{2} \leq \ln(1+\sin x) \leq \sin x \text{ kaikilla } x \in [0,\pi].$$

Integraalin monotonisuuden (lause 2.25) nojalla tällöin (1,1 p.)

$$\int_0^\pi \Big(\sin x - \frac{\sin^2 x}{2}\Big)\,dx \leq \int_0^\pi \ln(1+\sin x)\,dx \leq \int_0^\pi \sin x\,dx.$$

Oikea puoli on (0,4 p.)

$$\Big/_0^\pi - \cos x = -\cos\pi - (-\cos 0) = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2.$$

Vasen puoli on (0,7 p.)

$$\int_0^\pi \sin x\,dx - \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin^2 x\,dx = 2 - \frac{1}{2}\Big/_0^\pi \frac{1}{2}(x - \sin x\cos x) = 2 - \frac{\pi}{4}.$$

Siten

$$2 - \frac{\pi}{4} \leq \int_0^\pi \ln(1+\sin x)\,dx \leq 2.$$

Tehtävä 4. (Kuva 1,0 p.) Lasketaan käyrän $y = \ln x$ ja suoran $y = 1$ leikkauspiste: $\ln x = 1 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}$ (0,8 p.). Siten kuvion ala olkoon

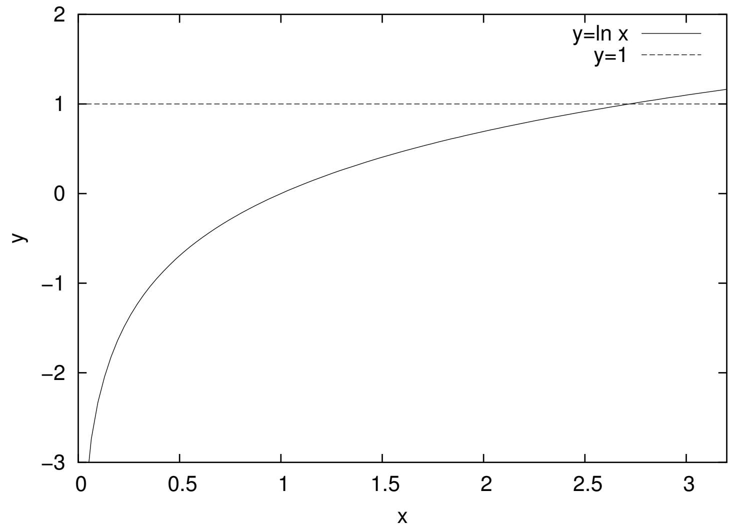
$$\underbrace{A = \int_0^{\mathrm{e}} |1 - \ln x|\,dx}_{1{,}8\ p.} \underbrace{= \lim_{a\to 0+}\int_a^{\mathrm{e}} |1-\ln x|\,dx}_{0{,}5\ p.} \underbrace{= \lim_{a\to 0+}\int_a^{e} (1-\ln x)\,dx}_{0{,}4\ p.}.$$

Integroimalla osittain saadaan (1,1 p.):

$$\int_a^{\mathrm{e}} (1 - \ln x)\, dx = \int_a^{\mathrm{e}} 1\, dx - \int_a^{\mathrm{e}} 1 \cdot \ln x\, dx = \mathrm{e} - a - \Big/_{\!a}^{\mathrm{e}} x \ln x + \int_a^{\mathrm{e}} x \cdot \frac{1}{x}\, dx$$
$$= \mathrm{e} - a - (\mathrm{e} \ln \mathrm{e} - a \ln a) + \mathrm{e} - a = \mathrm{e} - 2a + a \ln a,$$

sillä $\ln \mathrm{e} = 1$. Siten (0,4 p.)

$$A = \lim_{a \to 0+} (\mathrm{e} - 2a + a \ln a) = \mathrm{e} - 2 \cdot 0 + 0 = \mathrm{e} \approx 2,72.$$



Kuva 1: Käyrän n $f(x) = \ln x$ ja suorien $x = 0$ ja $y = 1$ rajaaman alueen pinta-ala.