Matematiikan approbatur 2B

Kurssin sisältö yleisesti. Sarjateoriaa ja monen (kahden ja kolmen) muuttujan differentiaalilaskentaa. Sarjateoriassa esitellään potenssisarjat ja Taylorin kehitelmä sekä niiden käyttötapoja. Differentiaalilaskennassa määritellään vektorimuuttujan funktion osittaisderivaatta ja differentioituvuus, käsitellään perusasiat käyristä ja pinnoista ja niiden tangenteista ja normaaleista.

Tähän kirjoitelmaan on koottu tärkeimmät tulokset (pääsääntöisesti ilman todistuksia) ja jokusia esimerkkejä.[1] Yksityiskohtia varten on syytä tutustua kirjallisuuteen; esimerkiksi kirja [**3**] on varsin sopivaa luettavaa.

Tätä tekstiä kirjoitettaessa on käytetty apuna lähinnä viiteluettelossa mainittuja kirjoja [**2**, luvut XIV ja XV], [**1**, luvut XIII, XIV ja XVI–XVIII], [**7**, osan II/1 luvut 1 ja 3] ja [**3**, luvut 9 ja 11–13].

[1]Viimeksi muutettu 30.4.2006.

Sisältö

Kirjallisuutta

[1] Serge Lang, *A First Course in Calculus*, 5th Edition, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 1986. [Luvut XIII, XIV ja XVI–XVIII.]

[2] Serge Lang, *"Short Calculus. The Original Edition* A First Course in Calculus*"*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2002; sama kuin kirjan *A First Course in Calculus* ensimmäinen laitos, Addison-Wesley, 1964. [Luvut XIV ja XV.]

[3] Robert A. Adams, *Calculus. A Complete Course*, 6th Edition, Pearson Addison Wesley, 2006. [Luvut 9 ja 11–13. Myös kirjan aiemmat laitokset ovat käyttökelpoisia.]

[4] Ross L. Finney, Maurce D. Weir, ja Frank R. Giordano, *Thomas' Calculus*, 10th Edition, Addison Wesley Longman, 2001. [Luvut 8 ja 10–11.]

[5] Useita tekijöitä, Monet kirjat, joiden otsikosta löytyy *Calculus* (mutta ei *Advanced*), sopivat oheislukemistoksi. [Hyviä tuntomerkkejä: sivukoko n. A4, sivuja n. 1000.]

[6] Aatos Lahtinen ja Erkki Pehkonen, *Matematiikkaa soveltajille. Peruskurssi korkeakouluja varten. Osa 2*, Kirjayhtymä, 1988. [Luvut 7 ja 8.]

[7] Richard Courant ja F. John, *Introduction to Calculus and Analysis, Volume I*, Reprint of the 1989 Edition, Classics in Mathematics, Springer, 1999; *Volume II/1*, 2000; *Volume II/2*, 2000.

[8] Stephen Abbott, *Understanding analysis*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2001.

[9] Tom M. Apostol, *Mathematical analysis*, 2nd edition, 5th printing, Addison Wesley, 1981; ensimmäinen laitos 1957.

LUKU 1

Sarjateoriaa

1. Johdantoa

Sarjateoriassa tarkastellaan päättymättömien summien

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j = a_1 + a_2 + \dots$$

ominaisuuksia. Tilanteesta riippuen sarjat voivat olla

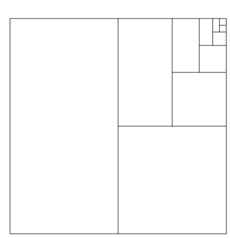
a) lukusarjoja $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$;
b) potenssisarjoja $\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$;
c) Fourier'n sarjoja $\frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}(a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)$;
d) yleisempiä funktiosarjoja $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$.

1.1. Merkintöjä. Kun $a_1, \dots, a_n$ ovat annettuja lukuja, käytetään summamerkintää $\sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Vastaavasti, jos on annettu lukujoukko $\{a_{j,k} \mid j \in \{1 \dots, n\},\ k \in \{1, \dots, m\}\}$, merkitään $\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_{j,k} = a_{1,1} + \dots + a_{1,m} + \dots + a_{n,1} + \dots + a_{n,m}$.

Esimerkki 1.1. Geometrisen sarjan summakaava lienee koulusta tuttu: $1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots = 1/(1-q)$. Erityisesti, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$. Tämän päättymättömän summan laskemista voidaan havannoillistaa kuvalla (ks. kuva 1): Jaetaan tason yksikköneliö $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ puoliksi suoralla $x = 1/2$. Jaetaan oikean puoleinen suorakaide kahdeksi neliöksi suoralla $y = 1/2$. Näin yksikköneliö jakautuu kolmeen osaan, joiden avulla yksikköneliön pinta-ala voidaan laskea: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$.

Toistetaan toiminto ”kaksi peräkkäistä” puolitusta oikean ylänurkan neliölle yhä uudelleen ja uudelleen. Kuvan tilanne vastaa viittä peräkkäistä kaksoispuolitusta ja yksikköneliön pinta-alalle jakoa $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + \frac{1}{1024} + \frac{1}{1024} = 1$.

Kun jakoa toistetaan ”päättymättömiin”, saadaan ilmeisesti geometriselle sarjalle summa $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1$.



Kuva 1. Geometrisen sarjan summa: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1$.

Esimerkki 1.2. Reaalilukujen yhteenlaskun vaihdannaisuus- ja liitännäisyysominaisuuksien nojalla on esimerkiksi luvuille $a_{1,1}$, $a_{1,2}$, $a_{2,1}$ ja $a_{2,2}$ voimassa

$$(a_{1,1} + a_{1,2}) + (a_{2,1} + a_{2,2}) = (a_{1,1} + a_{2,1}) + (a_{1,2} + a_{2,2}).$$

Tämä tarkoittaa, että jos luvut esitetään matriisina

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix},$$

niin kaikkien lukujen summa voidaan laskea yhtä lailla laskemalla ensin summat riveittäin ja sitten rivisummat yhteen kuin laskemalla ensin summat sarakkeittain ja sitten sarakesummat yhteen.

Päättymättömille summille tilanne on toisenlainen. Tarkastellaan seuraavan päättymättömän matriisin mukaisia lukuja $a_{j,k}$:

$$\begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \dots \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \dots \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

Geometrisen sarjan summakaavan nojalla jokaisen rivin lukujen summa on $\sum_{k=1}^{\infty} a_{j,k} = -1 + (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots) = 0$. Kun lasketaan rivisummat yhteen, saadaan

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{j,k} = \sum_{j=1}^{\infty} 0 = 0.$$

Toisaalta, kun lasketaan ensin summat sarakkeittain, saadaan sarakesummiksi

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{\infty} a_{j,1} & \sum_{j=1}^{\infty} a_{j,2} & \sum_{j=1}^{\infty} a_{j,3} & \sum_{j=1}^{\infty} a_{j,4} & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \dots \end{bmatrix},$$

tai yleisesti $\sum_{j=1}^{\infty} a_{j,k} = -\frac{1}{2^{k-1}}$. Kun lasketaan sarakesummat yhteen, saadaan geometrisen sarjan summakaavan nojalla

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{j,k} = \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{1}{2^{k-1}} = -2.$$

Yhteenlaskemisen järjestyksellä on siis väliä!

2. Sarjan suppeneminen

Määritelmä 2.1. Olkoon $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ annettu lukujono. Määritellään uusi lukujono asettamalla

$$s_1 = a_1,\ s_2 = a_1 + a_2,\ s_3 = a_1 + a_2 + a_3,\ \dots,\ s_n = a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Sanotaan, että (*päättymätön*) *sarja* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *suppenee* (eli konvergoi), jos (äärellinen) raja-arvo $\lim_{n\to\infty} s_n$ on olemassa. Muussa tapauksessa sanotaan, että *sarja* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *hajaantuu* (eli divergoi).

Jos sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee, sanotaan raja-arvoa $\lim_{n\to\infty} s_n$ *sarjan summaksi*, ja merkitään

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Lukuja a_k kutsutaan sarjan *termeiksi* ja lukuja s_n *sarjan osasummiksi.*

Huomautus 2.2. Jos sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee ja sen summa on s, niin termien muodostama jono suppenee kohti nollaa, sillä $a_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0$, kun $n \to \infty$. Erityisesti suppenevan sarjan termien jono on rajoitettu.

Käänteinen ei pidä paikkaansa; on olemassa jonoja $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ siten, että $a_k \to 0$, kun $k \to \infty$, mutta sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ hajaantuu.

Esimerkki 2.3 (Aritmeettinen sarja). Sarjaa $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ kutsutaan aritmeettiseksi, jos sarjan termit ovat muotoa $a_k = ck + d$ joillekin (k:sta riippumattomille) vakioille c ja d. Tässä

$$s_n = c\sum_{k=1}^{n} k + nd = c\frac{n(n+1)}{2} + nd = n\Big(c\frac{(n+1)}{2} + d\Big).$$

Jos $c > 0$, niin $c\frac{(n+1)}{2} + d \to \infty$, kun $n \to \infty$, joten myös $s_n \to \infty$. Jos $c < 0$, niin $c\frac{(n+1)}{2} + d \to -\infty$, kun $n \to \infty$, joten myös $s_n \to -\infty$. Jos $c = 0$ ja $d \neq 0$, niin $s_n = nd \to \pm\infty$ riippuen d:n etumerkistä. Siis aritmeettinen sarja suppenee, jos ja vain jos sen termit ovat kaikki nollia.

Esimerkki 2.4 (Geometrinen sarja). Sarjaa $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ kutsutaan geometriseksi, jos sarjan termit ovat muotoa $a_k = cq^{k-1}$ joillekin (k:sta riippumattomille) nollasta eroaville vakioille c ja q. Tämä tarkoittaa, että sarjan peräkkäisten termien suhde $a_{k+1}/a_k = (cq^k)/(cq^{k-1}) = q$ on vakio.

Jos $q = 1$, niin kyse on aritmeettisesta sarjasta, joka ei suppene, koska $c \neq 0$.

Olkoon $q \neq 1$. Osasummat ovat nyt

$$s_n = c\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = c\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Muistetaan, että jonolla $(q^n)_{n=1}^{\infty}$ on äärellinen raja-arvo, jos ja vain jos $|q| < 1$. Kun $|q| < 1$, on

$$\sum_{k=1}^{\infty} cq^{k-1} = \lim_{n\to\infty} c\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{c}{1-q}.$$

Lause 2.5. *Olkoot $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ suppenevia sarjoja ja c annettu luku. Tällöin sarjat $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$ suppenevat, ja niiden summat ovat*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} ca_k = c\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

3. Positiivitermiset sarjat

Määritelmä 3.1. Sarjaa $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sanotaan *positiivitermiseksi,* jos sen termit a_k ovat ei-negatiivisia, t.s. $a_k \geq 0$ kaikille $k \in \mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Olkoot sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ positiiviterminen ja $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ sen osasummien jono. Koska $s_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k = s_n + a_{n+1} \geq s_n$, muodostavat osasummat s_n kasvavan jono.

Lukujonojen ominaisuuksista muistetaan, että kasvava lukujono suppenee, jos ja vain jos se on ylöspäin rajoitettu. Positiivitermisen sarjan osasummille s_n tämä tarkoittaa, että sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee, jos ja vain jos on olemassa (äärellinen, n:stä riippumaton) vakio M siten, että $s_n \leq M$ kaikille $n \in \mathbb{Z}_+$.

Esimerkki 3.2. Osoitetaan, että sarja $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ suppenee. Sarja on positiiviterminen, joten riittää osoittaa, että osasummien jono on rajoitettu.

Olkoot $n \in \mathbb{Z}_+$ ja $N = 2^{n+1} - 1$. Arvioidaan osasummaa s_N (t.s. katkaistaan sarjan summa siten, että ensimmäinen pois jätetty termi on $1/(2^{n+1})^2$). Ryhmitellään osasumma s_N seuraavan kaavan mukaisesti ja korvataan jokaisen ryhmän termit suurimmalla termillään (eli ensimmäisellä). Tällöin

$$\begin{aligned}
s_N &= 1 + \underbrace{\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}}_{2} + \underbrace{\frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{7^2}}_{4} + \underbrace{\frac{1}{8^2} + \cdots + \frac{1}{15^2}}_{8} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{(2^n)^2} + \cdots + \frac{1}{(2^{n+1}-1)^2}}_{2^n} \\
&< 1 + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + 4 \cdot \frac{1}{4^2} + 8 \cdot \frac{1}{8^2} + \cdots + 2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^2} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} < 2.
\end{aligned}$$

Viimeinen epäyhtälö saadaan geometrisen sarjan avulla. Koska osasummien jono on rajoitettu, sarja $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ suppenee.

Esimerkki 3.3 (Harmoninen sarja). Osoitetaan, että sarja $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ hajaantuu. Sarja on positiiviterminen, joten riittää osoittaa, että osasummien jono ei ole rajoitettu.

Olkoot $n \in \mathbb{Z}_+$ ja $N = 2^{n+1}$. Arvioidaan osasummaa s_N (t.s. katkaistaan sarjan summa siten, että ensimmäinen pois jätetty termi on $1/(2^{n+1} + 1)$). Ryhmitellään osasumma s_N seuraavan kaavan mukaisesti ja korvataan jokaisen ryhmän termit pienimmällä termillään (eli viimeisellä). Tällöin

$$\begin{aligned}
s_N &= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{2} + \underbrace{\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}}_{4} + \underbrace{\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}}_{8} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2^n+1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}}_{2^n} \\
&> 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 8 \cdot \frac{1}{16} + \cdots + 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Koska summille s_N saatu alaraja kasvaa rajatta, kun $n \to \infty$, ei sarja $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ suppene.

Lause 3.4 (Majoranttitesti). *Olkoot $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ positiivitermisiä sarjoja. Oletetaan, että $a_k \leq b_k$ kaikille $k \in \mathbb{Z}_+$, ja että sarja $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ suppenee. Tällöin sarja*

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *suppenee ja*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

LAUSE 3.5 (Minoranttitesti). *Olkoot* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *ja* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *positiivitermisiä sarjoja. Oletetaan, että* $a_k \geq b_k$ *kaikille* $k \in \mathbb{Z}_+$*, ja että sarja* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *hajaantuu. Tällöin sarja* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *hajaantuu.*

ESIMERKKI 3.6. Muistetaan, että sarja $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ suppenee. Jos $s \geq 2$, on $1/k^s \leq 1/k^2$ kaikille $k \in \mathbb{Z}_+$, joten majoranttitestin nojalla sarja $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^s$ suppenee.

Vastaavasti, jos $s \leq 1$, on $1/k^s \geq 1/k$ kaikille $k \in \mathbb{Z}_+$, joten minoranttitesti nojalla sarja $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^s$ hajaantuu, koska sarja $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ hajaantuu.

HUOMAUTUS 3.7. Eräs käytännöllinen versio majorantti- ja majoranttitestistä on seuraava: Olkoot $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ positiivitermisiä sarjoja siten, että $b_k > 0$ kaikille $k \in \mathbb{Z}_+$.

Oletetaan, että raja-arvo $c = \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k}$ on olemassa ja $c = 1$.

Tällöin sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee, jos ja vain jos sarja $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ suppenee.

HUOMAUTUS 3.8. Olkoon $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppeneva positiiviterminen sarja. Tällöin sarjan termien järjestystä voidaan muuttaa ilman, että sarjan suppenevuus tai summa muuttuvat.

Samoin sarjan summa voidaan laskea ryhmittelemällä termit uudestaan esimerkiksi parillisiin ja parittomiin termeihin: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}$.

LAUSE 3.9 (Suhdetesti). *Olkoon* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *positiiviterminen sarja siten, että* $a_k > 0$ *kaikille* $k \in \mathbb{Z}_+$.

Oletetaan, että raja-arvo $c = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ *on olemassa.*

Jos $c < 1$*, niin sarja* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *suppenee.*

Jos $c > 1$*, niin sarja* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *hajaantuu.*

HUOMAUTUS 3.10. Suhdetestiä ei voi käyttää, jos $c = 1$.

Esimerkiksi hajaantuvalle sarjalle $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ on $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = 1$.

Vastaavasti suppenevalla sarjalle $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ on $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{(k+1)^2} = 1$.

LAUSE 3.11 (Juuritesti). *Olkoon* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *positiiviterminen sarja.*

Oletetaan, että raja-arvo $c = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k}$ *on olemassa.*

Jos $c < 1$*, niin sarja* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *suppenee.*

Jos $c > 1$*, niin sarja* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *hajaantuu.*

HUOMAUTUS 3.12. Juuritestiä ei voi käyttää, jos $c = 1$.

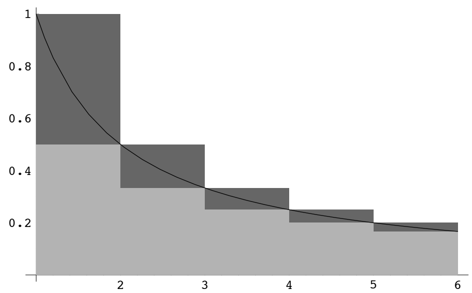
Esimerkiksi hajaantuvalle sarjalle $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ on $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{1/k} = 1$.

Vastaavasti suppenevalla sarjalle $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ on $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k^2} = 1$.

LAUSE 3.13 (Integraalitesti). *Olkoon* $f\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$ *annettu funktio. Oletetaan, että* $f(x) > 0$ *kaikille* $x \geq 1$*, ja että* f *on vähenevä.*

Tällöin sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$$



KUVA 2. Funktion kuvaajan rajoittaman alueen arvioiminen sarjan osasummilla.

suppenee, jos ja vain jos epäoleellinen Riemann-integraali

$$\int_1^\infty f(x)\,dx$$

suppenee.

ESIMERKKI 3.14 (Yli- ja aliharmoninen sarja). Tarkastellaan sarjaa $\sum_{k=1}^\infty 1/k^s$, missä s on annettu reaaliluku.

Olkoon $f(x) = 1/x^s$, kun $x \in [1,\infty)$.

Funktion f arvot ovat positiivisia ja f on vähenevä, jos $s \geq 0$, Jos $s \leq 0$, on $1/k^s = k^{-s} \geq 1$. Minoranttitestin nojalla sarja $\sum_{k=1}^\infty 1/k^s$ hajaantuu, kun $s \leq 0$.

Muistetaan, että

$$\int_1^b f(x)\,dx = \begin{cases} \ln b & \text{jos } s = 1, \\ \frac{1}{1-s}(b^{1-s} - 1) & \text{jos } s \neq 1. \end{cases}$$

Siis epäoleellinen integraali $\int_1^\infty f(x)\,dx$ suppenee, jos ja vain jos $s > 1$.

Integraalitestin perusteella sarja $\sum_{k=1}^\infty 1/k^s$ suppenee, jos ja vain jos $s > 1$.

Sarjan $\sum_{k=1}^\infty 1/k^s$ summaa kutsutaan usein *Riemannin ζ-funktioksi*,

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^s}, \quad \text{kun } s > 1.$$

ESIMERKKI 3.15. Olkoot $f(x) = 1/x$, kun $x \in [1,\infty)$ ja $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Tarkastelmalla funktion f kuvaajaa, on helppo todeta, että

$$\int_1^n f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \quad \text{ja} \quad \int_1^n f(x)\,dx \geq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}.$$

Koska $\int_1^n f(x)\,dx = \ln n$, saadaan arvio harmonisen sarjan hajaantumisnopeudelle

$$s_n - 1 \leq \ln n \leq s_n - \frac{1}{n} \quad \text{eli} \quad 1 \geq s_n - \ln n \geq \frac{1}{n}.$$

Siis erotus $s_n - \ln n$ pysyy rajoitettuna. Voidaan osoittaa, että kun $n \to \infty$, niin erotuksella $s_n - \ln n$ on raja-arvo. Tämä raja-arvo tunnetaan nimellä *Eulerin γ*.

4. Itseisesti suppenevat sarjat

MÄÄRITELMÄ 4.1. Olkoon $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ annettu sarja (ei välttämättä positiivitermi-nen). Sanotaan, että *sarja* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *suppenee itseisesti*, jos sarja $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ suppenee.

Jos sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee, mutta ei itseisesti, sanotaan, että *sarja* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *suppenee ehdollisesti.*

LAUSE 4.2. *Olkoon* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *annettu sarja. Oletetaan, että sarja* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *suppenee itseisesti. Tällöin sarja* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *suppenee.*

HUOMAUTUS 4.3. a) Edellinen lause ja positiivitermisten sarjojen majoranttitesti on usein varsin hyödyllinen yhdistelmä. Esimerkiksi, olkoot $|q| < 1$ ja $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ mikä tahansa lukujono, jolle pätee $|a_k| \leq 1$ kaikille $k \in \mathbb{Z}_+$. Tällöin on $|a_k q^{k-1}| \leq |q|^{k-1}$ kaikille $k \in \mathbb{Z}_+$. Koska geometrinen sarja $\sum_{k=1}^{\infty} |q|^{k-1}$ suppenee, suppenee majoranttitestin perusteella myös sarja $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k q^{k-1}|$, t.s. sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k q^{k-1}$ suppenee itseisesti. Siis sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k q^{k-1}$ suppenee.

b) Jos sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee ehdollisesti, niin sarjat $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ hajaantuvat. Tässä $a_k^+ = a_k$, jos $a_k \geq 0$, ja $a_k^+ = 0$, jos $a_k < 0$. Vastaavasti $a_k^- = 0$, jos $a_k \geq 0$, ja $a_k^- = -a_k$, jos $a_k < 0$. Näillä merkinnöillä $a_k = a_k^+ - a_k^-$ ja $|a_k| = a_k^+ + a_k^-$.

c) Olkoon $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sarja, joka suppenee ehdollisesti. Voidaan osoittaa, että jos r on mikä tahansa reaaliluku, niin sarjan termit a_k voidaan järjestää uudestaan siten, että uudelleen järjestetyn sarjan osasummien jono t_n suppenee kohti lukua r (t.s. termien järjestystä vaihtamalla sarjan summaksi saadaan mikä tahansa tulos).

d) Jos sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee itseisesti. voidaan sarjan termien järjestystä muuttaa ilman, että sarjan suppenevuus tai summa muuttuvat.

Samoin itseisesti suppenevan sarjan summa voidaan laskea ryhmittelemällä termit uudestaan esimerkiksi parillisiin ja parittomiin termeihin: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}$.

Kumpikaan näistä ominaisuuksista ei päde ehdollisesti suppenevalle sarjalle.

5. Vuorottelevat sarjat

Leibnizin lause vuorottelevista sarjoista.

LAUSE 5.1. *Olkoon* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *annettu sarja. Oletetaan, että*

(i) *jono* $(|a_k|)_{k=1}^{\infty}$ *on vähenevä (t.s.* $|a_{k+1}| \leq |a_k|$ *kaikille* $k \in \mathbb{Z}_+$*);*
(ii) *sarjat termit ovat vuoroin positiivisia ja vuoroin negatiivisia (t.s., jos esimerkiksi* $a_1 > 0$*, niin* $(-1)^{k-1} a_k > 0$ *kaikille* $k \in \mathbb{Z}_+$*);*
(iii) $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Tällöin sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *suppenee.*

HUOMAUTUS 5.2. Oletetaan, että edellisen lauseen oletukset toteutuvat sarjalle $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, ja että $a_1 > 0$. Olkoot $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sarjan summa ja $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ sarjan n. osasumma. Lauseen todistusta voidaan muokata siten, että saadaan seuraava epäyhtälö

$$0 \leq (-1)^n (s - s_n) \leq |a_{n+1}|.$$

Tämä tarkoittaa, että jos sarjan summa s korvataan osasummalla s_n, niin virhe $s - s_n$ on samanmerkkinen kuin ensimmäinen pois jätetty termi $a_{n+1} = (-1)^n |a_{n+1}|$ ja suuruudeltaan enintään pois jätetyn termin itseisarvo.

ESIMERKKI 5.3. Sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ termit toteuttavat edellisen lauseen ehdot, joten sarja suppenee. Se ei kuitenkaan suppene itseisesti, koska sarja $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ on harmoninen sarja (ja siis hajaantuva).

6. Potenssisarjat

Olkoon $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ annettu lukujono. Sarjaa $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ kutsutaan *potenssisarjaksi* ja lukuja a_k sarjan *kertoimiksi*.

Potenssisarjan $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ osasummat $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ovat polynomeja.

Sanotaan, että potenssisarja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ suppenee pisteessä $x = x_1$, jos sarja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_1^k$ suppenee.

Toisinaan tarkastellaan muotoa $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ olevia potenssisarjoja. Näiden ominaisuudet voidaan selvittää merkitsemällä $z = x - x_0$ ja tarkastelemalla muuttujan z potenssisarjaa $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$.

Potenssisarja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ suppenee aina pisteessä $x = 0$ ja sarja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ suppenee aina pisteessä $x = x_0$. Voi kuitenkin käydä niin, että sarja ei muulloin suppene. Voidaan esimerkiksi osoittaa, että potenssisarja

$$1 + x + 2!\, x^2 + 3!\, x^3 + \dots k!\, x^k + \dots$$

suppenee vain, kun $x = 0$. Tässä $k!$ tarkoittaa luvun k kertomaa $k! = k \cdot (k-1) \cdots 2 \cdot 1$.

LAUSE 6.1. *Oletetaan, että potenssisarja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ suppenee pisteessä $x = x_1$ ja $x_1 \neq 0$. Tällöin potenssisarja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ suppenee itseisesti kaikille x, joille $|x| < |x_1|$.*

TODISTUS. Oletuksen mukaan sarja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_1^k$ suppenee. Tällöin jono $(a_k x_1^k)_{k=0}^{\infty}$ on rajoitettu, t.s. on olemassa vakio M siten, että $|a_k x_1^k| \leq M$ kaikille $k \in \mathbb{N}$.

Olkoon x valittu siten, että $|x| < |x_1|$. Tällöin $|a_k x^k| = |a_k x_1^k|\, |x/x_1|^k \leq M |x/x_1|^k$. Koska $|x/x_1| < 1$, on sarja $\sum_{k=0}^{\infty} M |x/x_1|^k$ suppeneva geometrinen sarja. Lisäksi $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k x^k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} M |x/x_1|^k$, joten majoranttitestin nojalla sarja $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k x^k|$ suppenee. Siis sarja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ suppenee itseisesti. $\square$

Lauseen nojalla potenssisarjalle $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ tapahtuu siis jokin seuraavista:

a) sarja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ suppenee vain, kun $x = 0$;
b) sarja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ suppenee kaikille luvuille x;
c) on olemassa luku x_1 siten sarja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ei suppene, kun $x = x_1$.

Viimeisessä tapauksessa asetetaan

$$r = \sup\{x_1 \mid \text{sarja } \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_1^k \text{ suppenee}\}.$$

Lukua r sanotaan potenssisarjan $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *suppenemissäteeksi*. Sovitaan vielä, että sarjan suppenemissäde on nolla, jos sarja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ suppenee vain, kun $x = 0$, ja että suppenemissäde on ääretön, jos sarja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ suppenee kaikille luvuille x.

HUOMAUTUS 6.2. Voidaan osoittaa, että jos raja-arvo $c = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ on olemassa ja $0 < c < \infty$, niin potenssisarjan $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ suppenemissäde on $r = 1/c$.

Voidaan myös osoittaa, että jos $a_k \neq 0$ kaikille riittävän suurille k ja raja-arvo $r = \lim_{k\to\infty} |a_k/a_{k+1}|$ on olemassa, niin potenssisarjan $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ suppenemissäde on r.

Esimerkki 6.3. Geometrinen sarja $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ suppenee itseisesti, kun $|x| < 1$, ja se ei suppene lainkaan, kun $|x| \geq 1$. Sarjan suppenemissäde on siis 1.

Tälle sarjalle on $a_k = 1$ kaikille k, joten $\lim_{k\to\infty} |a_k/a_{k+1}| = 1$.

Lause 6.4 (Sarjojen Cauchyn tulo). *Olkoot $r > 0$ annettu luku, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ja $\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$ potenssisarjoja, jotka suppenevat itseisesti, kun $|x| < r$.*
Muodostetaan sarja $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, jonka kertoimet c_n määrätään seuraavasti:

$$c_0 = a_0 b_0,\ c_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1,\ \ldots,\ c_n = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \cdots + a_1 b_{n-1} + a_0 b_n.$$

Tällöin sarja $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ suppenee itseisesti, kun $|x| < r$, ja

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\Big)\Big(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\Big).$$

Huomautus 6.5. Kertoimien c_n määrittely tarkoittaa sitä, että sarjojen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ja $\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$ tulo voidaan muodostaa samalla tavalla kuin polynomien tulo: kerrotaan termeittäin ja yhdistetään x:n potenssit,

$$\begin{aligned}
&(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots)\\
&= (a_0 b_0 + a_0 b_1 x + a_0 b_2 x^2 + a_0 b_3 x^3 + \ldots)\\
&\quad + (a_1 b_0 x + a_1 b_1 x^2 + a_1 b_2 x^3 + a_1 b_3 x^4 + \ldots)\\
&\quad + (a_2 b_0 x^2 + a_2 b_1 x^3 + a_2 b_2 x^4 + a_2 b_3 x^5 + \ldots)\\
&\quad + (a_3 b_0 x^3 + a_3 b_1 x^4 + a_3 b_2 x^5 + a_3 b_3 x^6 + \ldots) + \ldots\\
&= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2\\
&\quad + (a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0)x^3 + \ldots
\end{aligned}$$

Caychyn tulosarjan suppenevuuden todistus sivuutetaan.

Esimerkki 6.6. Koska geometrinen sarja $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ suppenee itseisesti, kun $|x| < 1$, saadaan sarjojen Cauchyn tulosäännön avulla (valitse $a_k = b_k = 1$ kun $k = 0, 1, \ldots$)

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\Big)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n.$$

Lemma 6.7. *Olkoot $r > 0$ annettu luku ja potenssisarja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, joka suppenee itseisesti, kun $|x| < r$. Tällöin myös sarja $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k$ suppenee itseisesti, kun $|x| < r$.*

Todistus. Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että $a_k \geq 0$ kaikille $k \in \mathbb{N}$, ja että $0 < x < r$ (näin voidaan tehdä, koska ollaan kiinnostuneita vain sarjan itseisestä suppenevuudesta).

Olkoon c luku siten, että $x < c < r$. Koska $\lim_{k\to\infty} k^{1/k} = 1$, on $\lim_{k\to\infty} k^{1/k} x = x < c$. Riittävän suurille k:n arvoille (esimerkiksi, kun $k \geq N$) on siis

$$k^{1/k} x < c.$$

Tällöin riittävän suurille k:n arvoille on $k x^k < c^k$, joten

$$k a_k x^k < a_k c^k.$$

Oletuksesta seuraa, että sarja $\sum_{k=N}^{\infty} a_k c^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k c^k - \sum_{k=0}^{N-1} a_k c^k$ suppenee. Majoranttitestin perusteella myös sarja $\sum_{k=N}^{\infty} k a_k x^k$ suppenee. Siis myös sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{N-1} k a_k x^{k-1} + \frac{1}{x} \sum_{k=N}^{\infty} k a_k x^k$$

suppenee. □

Huomautus 6.8. Vastaavanlainen tulos saadaan myös termeittäin integroidulle potenssisarjalle: jos sarja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ suppenee itseisesti, kun $|x| < r$, niin myös sarja $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} a_k x^{k+1}$ suppenee itseisesti, kun $|x| < r$. Tämän todistaminen on helpompaa kuin termeittäin derivoidun sarjan suppenemisen osoittaminen, ja sen käsittely jätetään harjoitustehtäväksi.

Lause 6.9. *Olkoon annettuna luku $r > 0$ ja potenssisarja $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, joka suppenee itseisesti, kun $|x| < r$. Määritellään funktio avoimella välillä $(-r, r)$ asettamalla*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Tällöin f on derivoituva välillä $(-r, r)$ ja

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}.$$

Todistus. Valitaan luku b siten, että $0 < b < r$. Seuraavaksi valitaan $\delta > 0$ siten, että $b + \delta < r$. Funktion f erotusosamäärää tarkastellaan pisteissä x, joille $|x| < b$, ja luvuille h, joille $|h| < \delta$. Tällöin $|x + h| \leq |x| + |h| < b + \delta < r$.

Erotusosamäärän osoittaja on

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x+h)^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k ((x+h)^k - x^k).$$

Väliarvolauseen nojalla lukujen x ja $x + h$ välistä löytyy luku x_k, jolle

$$(x+h)^k - x^k = k x_k^{k-1} h.$$

Siis

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x_k^{k-1} h.$$

Edellisen lemman nojalla sarja $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ suppenee. Osoitetaan, että funktion f erotusosamäärä lähestyy tämän sarjan summaa. Erotusosamäärän ja summan erotus on

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x_k^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=2}^{\infty} k a_k \bigl(x_k^{k-1} - x^{k-1}\bigr).$$

Huomaa, että viimeisen summan erotus $x_k^{k-1} - x^{k-1}$ on nolla, kun $k = 1$.

Käyttämällä väliarvolausetta uudestaan lukujen x_k ja x välistä löydetään luku y_k, jolle

$$x_k^{k-1} - x^{k-1} = (k-1) y_k^{k-2} (x_k - x).$$

Siis

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k y_k^{k-2}(x_k - x).$$

Luvuille y_k on $|y_k| \leq b + \delta$ ja erotuksille $x_k - x$ on $|x_k - x| \leq |h|$ (piirrä kuva), joten kolmioepäyhtälön avulla saadaan

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}\Big| &\leq \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)|a_k|\,|y_k|^{k-2}|x_k - x| \\
&\leq |h| \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)|a_k|\,(b+\delta)^{k-2}.
\end{aligned}$$

Kun edellistä lemmaa sovelletaan kaksi kertaa, nähdään, että epäyhtälöketjussa viimeisenä esiintyvä sarja suppenee. Olkoon $S = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)|a_k|\,(b+\delta)^{k-2}$. Kun $h \to 0$, on $|h|\,S \to 0$, joten myös epäyhtälön vasemmalla puolella oleva lauseke lähestyy nollaa. Tämä merkitsee, että

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \to \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}, \quad \text{kun } h \to 0,$$

joten f on derivoituva ja sen derivaatta on termeittäin derivoimalla saatu sarja. □

Esimerkki 6.10. Geometrinen sarja $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ määrittelee funktion välille $(-1, 1)$. Edellisen lauseen mukaan f on derivoituva tällä välillä ja derivaatta voidaan laskea termeittäin derivoimalla. Koska sarja summa on $f(x) = 1/(1-x)$, saadaan

$$\sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Esimerkki 6.11. Merkitään luvun k kertomaa $k! = k \cdot (k-1) \cdots 2 \cdot 1 = k \cdot (k-1)!$. Suhdetestin avulla nähdään helposti, että sarja

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \ldots$$

suppenee itseisesti kaikille reaaliluvuille x:

$$\frac{|x^{k+1}|}{(k+1)!} \frac{k!}{|x^k|} = \frac{|x|}{k+1} \to 0,$$

kun $k \to \infty$.

Sarjan summa voidaan siis derivoida termeittäin, jolloin saadaan

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \cdots + \frac{kx^{k-1}}{k!} + \ldots 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + \cdots = f(x).$$

Funktio f toteuttaa siis differentiaaliyhtälön $y' = y$. Tämän yhtälön yleinen ratkaisu on $y = Ce^x$. Koska funktiolle f on $f(0) = 1$, on

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \ldots.$$

Esimerkki 6.12. Vastaavalla tavalla voidaan osoittaa, että sarjat

$$S(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \qquad \text{ja} \qquad C(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

suppenevat itseisesti kaikille reaaliluvuille x. Sarjojen summien derivaatoille on

$$S'(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = C(x) \qquad \text{ja} \qquad C'(x) = -x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \dots = -S(x).$$

Näiden derivaattojen ominaisuuksien perusteella voisi tehdä arvauksen:

$$S(x) = \sin x \qquad \text{ja} \qquad C(x) = \cos x.$$

Tähän palataan myöhemmin.

Huomautus 6.13. Muunlaisten funktiosarjojen kuin potenssisarjojen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ derivoiminen termeittäin ei yleensä ole sallittua (t.s. termeittäin derivoimalla saatu tulos ei välttämättä ole sarjan summan derivaatta).

Vielä yllättävämpää lienee se, että vaikka sarjassa $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ olevat funktiot f_k olisivat derivoituvia, ei sarjan summan tarvitse olla derivoituva. Eräs ensimmäisiä tämänkaltaisia esimerkkejä on peräisin Karl Weierstrassilta vuodelta 1876:

$$W(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b^k \sin(a^k \pi x),$$

missä a on pariton, positiivinen kokonaisluku ja $0 < b < 1$ siten, että $ab > 1 + 3\pi/2$ (myöhemmin on todettu, että ehdot $0 < b < 1$ ja $ab \geq 1$ riittävät). Tämä funktio on jatkuva, mutta se ei ole derivoituva missään pisteessä x; vrt. kuva 3, missä $b = 1/2$ ja $a = 3$.

Vielä yllättävämpi on Bernhard Riemannin esimerkki vuodelta 1861:

$$R(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin(k^2 \pi x).$$

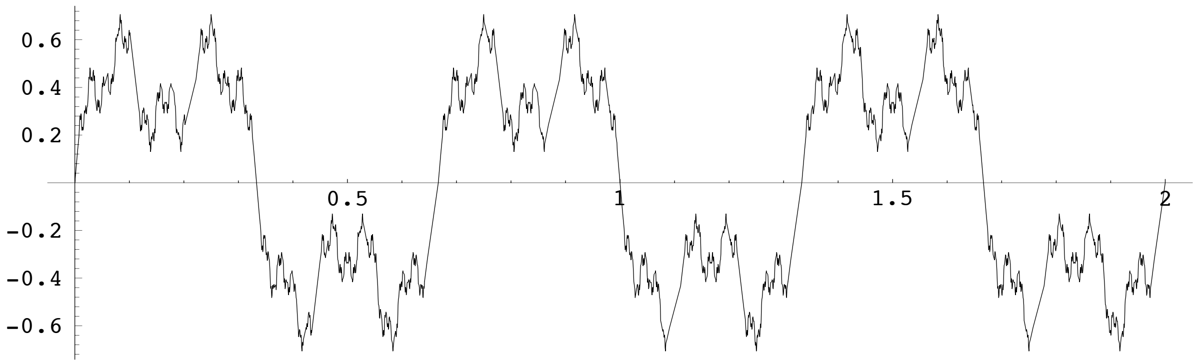
Tämä funktio on derivoituva pisteissä x, jotka ovat muotoa $x = \frac{2n+1}{2m+1}$, missä n ja m ovat mitä tahansa ei-negatiivisia kokonaislukuja. Missään muussa pisteessä R ei ole derivoituva. Lisäksi pisteissä $x = \frac{2n+1}{2m+1}$ funktion R derivaatta on $-\frac{1}{2}$. Vrt. kuva 4.

G. H. Hardy ratkaisi Riemannin funktion derivoituvuusongelman osittain vuonna 1916 (oikeastaan derivoitumattomuusongelman; tuona aikana luultiin, että funktiolla R ei ole derivaattaa missään pisteessä; Hardy osoitti, että R ei ole derivoituva tietyissä rationaalisissa pisteissä). Täydellisen ratkaisu ongelmaan löysi Joseph L. Gerver vasta vuonna 1970.

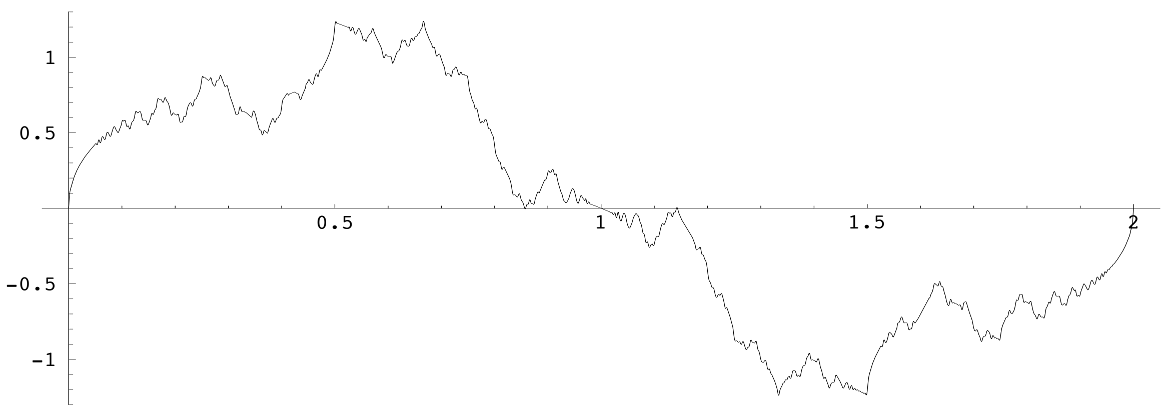
Lause 6.14. *Olkoon annettuna luku $r > 0$ ja potenssisarja $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, joka suppenee itseisesti, kun $|x| < r$. Tällöin f:n integraali välillä $(-r, r)$ voidaan määrätä termeittäin integroimalla,*

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}, \quad \text{kun } |x| < r.$$

Todistus. Termeittäin integroimalla saatu sarja suppenee itseisesti. Olkoon sen summa $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$. Tällöin edellisen lauseen nojalla F:n sarja voidaan derivoida termeittäin, jolloin saadaan $F'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (k+1) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k =$



KUVA 3. Weierstrassin funktio W.



KUVA 4. Riemannin funktio R.

$f(x)$. Siis $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt + C$ jollekin vakiolle C. Mutta koska $F(0) = 0 = \int_0^0 f(t)\,dt$, on $C = 0$. □

ESIMERKKI 6.15. Koska sarja

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

suppenee itseisesti välillä $(-1, 1)$, saadaan edellisen lauseen perusteella

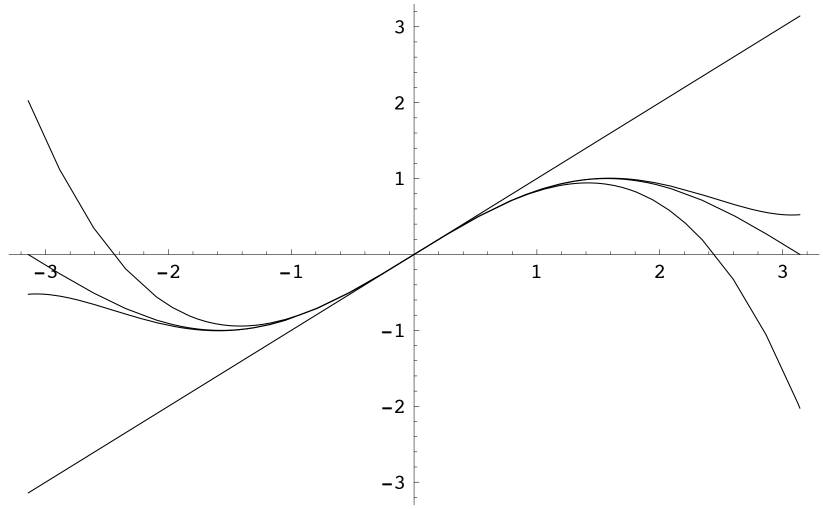
$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} x^{k+1}.$$

Toisaalta, f:n sarja on geometrinen, joten

$$f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Siis

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} x^{k+1} = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\log(1-x).$$



KUVA 5. Sinin ja sen Taylorin polynomien $P_1(x) = x$, $P_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$ ja $P_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ kuvaajat.

7. Taylorin ja Maclaurinin sarja

7.1. Taylorin kaava. Olkoot n positiivinen kokonaisluku ja f funktio, jolla jollakin origon sisältävällä avoimella välillä on derivaatat kertalukua n myöten.

Merkitään $0! = 1$, $1! = 1$ ja $k! = k \cdot (k-1)! = k \cdot (k-1) \cdots 2 \cdot 1$, kun $k \in \mathbb{Z}_+$ (luvun k *kertoma*).

Ongelma: Mikä on "paras" funktiota f origon lähellä approksimoiva *polynomi*? Eräs kriteeri hyvälle approksimaatiolle on, että funktion f ja etsityn polynomin P kaikki derivaatat kertalukua n myöten ovat samat pisteessä $x = 0$: $f^{(k)}(0) = P^{(k)}(0)$, kun $k = 0, 1, \ldots, n$. Tässä sovitaan, että $f^{(0)} = f$.

Olkoon haettu polynomi $P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n$. Nyt

$$\begin{aligned} P'(x) &= c_1 + 2c_2 x + \cdots + nc_n x^{n-1}, \\ P^{(2)}(x) &= 2c_2 + \cdots + n(n-1)c_n x^{n-2}, \\ &\ \vdots \\ P^{(k)}(x) &= k!c_k + \text{termejä, joissa on tekijänä } x. \end{aligned}$$

Siis

$$P^{(k)}(0) = k!c_k.$$

Koska etsitylle polynomille P asetettiin ehdoksi $f^{(k)}(0) = P^{(k)}(0)$, kun $k = 0, 1, \ldots, n$, ovat P:n haetut kertoimet siis

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \text{ kun } k = 0, 1, \ldots, n.$$

MÄÄRITELMÄ 7.1. Funktion f *astetta n oleva Taylorin polynomi* on polynomi

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}\,x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n.$$

Huomautus 7.2. Jos ollaan kiinnostuneita funktion f approksimoinnista polynomeilla jonkin muun pisteen x_0 läheisyydessä, niin määrittelemme vastaavasti funktion *f astetta n olevan Taylorin polynomin pisteessä x_0* polynomiksi

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}\,(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n.$$

Lause 7.3 (Taylorin kaava). *Olkoon funktio f määritelty suljetulla välillä, jonka päätepisteinä ovat a ja b. Oletetaan, että funktiolla f on jatkuvat derivaatat $f^{(k)}$ kertalukua n myöten tällä välillä.*

Tällöin

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\,(b - a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}\,(b - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}\,(b - a)^{n-1} + R_n,$$

missä R_n (ns. jäännöstermi*) on integraali*

$$R_n = \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, f^{(n)}(t)\, dt.$$

Todistus. Todistetaan väite induktiolla luvun n suhteen.

Tapauksessa $n = 1$ jäännöstermi saa muodon

$$R_1 = \int_a^b \frac{(b-t)^0}{0!}\, f'(t)\, dt = \int_a^b f'(t)\, dt.$$

Analyysin peruslauseen nojalla tämä on

$$\int_a^b f'(t)\, dt = f(b) - f(a),$$

joten väite on tosi tapauksessa $n = 1$.

Olkoon nyt $n = 2$. Analyysin peruslauseen nojalla

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\, dt.$$

Käytetään osittaisintegrointia muuttamaan tämä integraali muotoon, jossa on f:n toinen derivaatta. Asetetaan $u = f'(t)$ ja $dv = dt$. Valitaan funktioksi $v(t) = -(b-t)$. Osittaisintegrointikaavan mukaan

$$\int_a^b u\, dv = \Big|_a^b uv - \int_a^b v\, du = f'(a)(b-a) + \int_a^b (b-t)\, f^{(2)}(t)\, dt.$$

Taylorin kaava tapauksessa $n = 2$ seuraa tästä.

Samaa menetelmää käyttäen saadaan Taylorin kaava tapauksessa $n = 3$ (tämän tarkistaminen jätetään lukijan tehtäväksi).

Yleinen tapaus: Oletetaan, että väite pätee, kun oikean puolen summassa on n termiä sekä jäännöstermi

$$R_n = \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, f^{(n)}(t)\, dt.$$

Asetetaan $u = f^{(n)}(t)$ ja $dv = \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt$. Valitaan funktioksi $v(t) = -\frac{(b-t)^n}{n!}$. Osittaisintegrointikaavan mukaan

$$R_n = \int_a^b u\,dv = \Big|_a^b uv - \int_a^b v\,du = f^{(n)}(a)\frac{(b-a)^n}{n!} + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}\,f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Induktio-oletuksen mukaan on

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\,(b-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}\,(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}\,(b-a)^{n-1} + R_n.$$

Sijoittamalla tähän R_n edellisestä kaavasta ja järjestämällä termit uudestaan, saadaan Taylorin kaava tapauksessa $n+1$. □

7.2. Jäännöstermin arvioiminen.

Lause 7.4. *Lauseen 7.3 oletuksin ja merkinnöin: Lukujen a ja b välissä on olemassa luku c siten, että*

$$R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}\,(b-a)^n.$$

Todistus. Oletetaan, että $a < b$. Koska derivaatta $f^{(n)}$ on jatkuva suljetulla ja rajoitetulla välillä $[a,b]$, se saavuttaa tällä välillä suurimman ja pienimmän arvonsa. Väliltä $[a,b]$ löydetään siis pisteet u ja v siten, että $f^{(n)}(u)$ on derivaatan $f^{(n)}$ suurin ja $f^{(n)}(v)$ pienin arvo tällä välillä. Tällöin $f^{(n)}(v) \le f^{(n)}(t) \le f^{(n)}(u)$ kaikille $t \in [a,b]$.

Kaikille välin $[a,b]$ pisteille t on $t - b \ge 0$, joten jäännöstermin R_n integrandille on voimassa

$$\frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,f^{(n)}(v) \le \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,f^{(n)}(t) \le \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,f^{(n)}(u).$$

Kun tämä epäyhtälö integroidaan puolittain, saadaan

$$f^{(n)}(v)\int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt \le \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,f^{(n)}(t)\,dt \le f^{(n)}(u)\int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt.$$

Tässä

$$\int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt = \Big|_a^b - \frac{(b-t)^n}{n!} = \frac{(b-a)^n}{n!}.$$

Edellinen epäyhtälö saa nyt muodon

$$f^{(n)}(v)\frac{(b-a)^n}{n!} \le R_n \le f^{(n)}(u)\frac{(b-a)^n}{n!}.$$

Jatkuvien funktioiden väliarvolauseen nojalla jatkuva funktio saavuttaa kaikki kahden arvonsa väliin jäävät arvot. Funktio

$$t \mapsto f^{(n)}(t)\frac{(b-a)^n}{n!}$$

on jatkuva, joten se saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa väliin jäävän arvon R_n jossakin pisteessä c, t.s. jollekin välin $[a,b]$ pisteelle c on voimassa

$$R_n = f^{(n)}(c)\frac{(b-a)^n}{n!}.$$

Tapauksessa $a > b$ jotkin edellisistä epäyhtälöistä vaihtuvat vastakkaisiksi epäyhtälöiksi; yksityikohdat jätetään lukijan tehtäväksi. □

SEURAUS 7.5. *Lauseen 7.3 oletuksin ja merkinnöin: kun $h = b - a$, on*

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\,h + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}\,h^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}\,h^{n-1} + R_n,$$

missä jäännöstermille R_n on voimassa arvio

$$|R_n| \le M_n\,\frac{|h|^n}{n!},$$

kun M_n on derivaatan $f^{(n)}$ itseisarvon yläraja välillä $[a, a+h]$ (tai välillä $[a+h, a]$, jos $h < 0$).

Seurauslausetta sovelletaan usein seuraavassa muodossa:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}\,x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\,x^{n-1} + R_n(x),$$

missä jäännöstermille $R_n(x)$ on voimassa arvio

$$|R_n(x)| \le M_n\,\frac{|x|^n}{n!},$$

ja M_n on derivaatan $f^{(n)}$ itseisarvon yläraja lukujen 0 ja x välillä.

HUOMAUTUS 7.6. Olkoon f funktio, joka on määritelty jossakin origon ympäristössä, ja jolla on kaikkien kertalukujen derivaatat.

Taylorin kaavan nojalla sarja

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}\,x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n$$

suppenee ja sen summa on $f(x)$, jos ja vain jos jäännöstermeille on voimassa

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

Vaikka funktiolla f olisi kaikkien kertalukujen jatkuvat derivaatat koko reaaliakselilla ja sarja $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n$ suppenisi, ei sarjan summan tarvitse olla $f(x)$. Esimerkiksi, jos

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & \text{kun } x > 0, \text{ ja} \\ 0, & \text{kun } x \le 0, \end{cases}$$

niin funktiolla f on kaikkien kertalukujen jatkuvat derivaatat koko reaaliakselilla,

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} e^{-1/x}\,P(1/x), & \text{kun } x > 0, \text{ ja} \\ 0, & \text{kun } x \le 0, \end{cases}$$

missä P on jokin polynomi. Erityisesti $f^{(n)}(0) = 0$ kaikille $n \in \mathbb{N}$. Siis sarja $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n$ suppenee ja sen summa on identtisesti nolla, joten sarjan summa ei ole $f(x)$, kun $x > 0$.

MÄÄRITELMÄ 7.7. Olkoon x_0 annettu reaaliakselin piste. Olkoon f funktio, jolla on kaikkien kertalukujen jatkuvat derivaatat jollakin pisteen x_0 sisältävällä avoimella välillä.

Potenssisarjaa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n$$

kutsutaan funktion f *Taylorin sarjaksi pisteeessä* x_0.

Jos $x=0$, kutsutaan funktion f Taylorin sarjaa pisteeessä $x=0$ usein funktion f *Maclaurinin sarjaksi.*

LAUSE 7.8. *Oletetaan, että potenssisarja*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k\,(x-x_0)^k$$

suppenee jollakin pisteen x_0 *sisältävällä avoimella välillä.*

Tällöin y.o. sarja on funktion f *Taylorin sarja pisteessä* x_0. *Erityisesti*

$$c_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \textit{ja} \quad R_n=\sum_{k=n}^{\infty} c_k\,(x-x_0)^k.$$

TODISTUS. Se, että väitetty kaava pätee kertoimille c_k, saadaan vastaavalla laskulla kuin ennen Määritelmää 7.1 (korvataan polynomi P y.o. potenssisarjalla). Apuna on Lause 6.9, jonka mukaan potenssisarja voidaan derivoida termeittäin (avoimella) suppenemisvälillään.

Jos f:n astetta $n-1$ olevaa Taylorin polynomia pisteessä x_0 merkitään P_{n-1}, niin vastaava jäännöstemi R_n toteuttaa

$$f(x)=P_{n-1}(x)+R_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1} c_k\,(x-x_0)^k+\sum_{k=n}^{\infty} c_k\,(x-x_0)^k.$$

Jäännöstemiä R_n koskeva väite seuraa tästä. □

ESIMERKKI 7.9. Geometriselle sarjalle on välillä $(-1,1)$

$$f(x)=\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty} x^k=\sum_{k=0}^{n-1} x^k+\frac{x^n}{1-x}.$$

Edellisen lauseen perusteella f:n Taylorin astetta $n-1$ oleva polynomi P_{n-1} ja sitä vastaava jäännöstermi R_n ovat

$$P_{n-1}(x)=\sum_{k=0}^{n-1} x^k \quad \text{ja} \quad R_n(x)=\frac{x^n}{1-x}.$$

Potenssisarjan termeittäin derivointia koskevan Lauseen 6.9 avulla saadaan funktion $f'(x)=1/(1-x)^2$ sarja, astetta $n-1$ oleva Taylorin polynomi $\tilde{P}_{n-1}$ ja vastaava jäännöstermi $\tilde{R}_n$ edellisistä derivoimalla (huomaa yhtä isompi n)

$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1},$$

$$\tilde{P}_{n-1}(x)=\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} \quad \text{ja} \quad \tilde{R}_n(x)=\frac{(n+1)x^n-nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

8. Alkeisfunktioiden sarjakehitelmiä

8.1. Trigonometriset funktiot. Olkoon $f(x) = \sin x$. Tällöin

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f^{(2)}(0) = 0,\ f^{(3)}(0) = -1.$$

Taylorin kaavan nojalla (valitaan $n = 2m$) saadaan

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + R_{2m+1}(x).$$

Koska $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ kaikille x, saadaan jäännöstermille $R_n(x)$ arvio

$$|R_n(x)| \leq M_n \frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|^n}{n!}.$$

Vastaavalla tavalla saadaan kosinille

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + R_{2m+2}(x),$$

missä jäännöstermille $R_n(x)$ on voimasasa arvio

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^n}{n!}.$$

Lause 8.1. *Kaikille reaaliluvuille x on voimassa*

$$\frac{x^n}{n!} \to 0, \quad \text{kun } n \to \infty.$$

Todistus. Voidaan olettaa, että $x > 0$. Valitaan luku $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ siten, että $n_0 > 2x$. Tällöin $x/n_0 < 1/2$. Nyt

$$\frac{x^n}{n!} = \frac{x^{n_0}}{n_0!}\frac{x}{n_0+1}\frac{x}{n_0+2}\cdots\frac{x}{n} \leq \frac{x^{n_0}}{n_0!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}.$$

Kun $n \to \infty$, on $(1/2)^{n-n_0} \to 0$, mistä väite seuraa. □

Lause 8.2. *Sinin ja kosinin Maclaurinin sarjat suppenevat koko reaaliakselilla ja ne esittävät k.o. funktiota, t.s. kaikille reaaliluvuille x on voimassa*

$$\sin x = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}, \quad \text{ja} \quad \cos x = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}.$$

8.2. Eksponenttifunktio. Olkoon $f(x) = e^x$. Tällöin $f^{(n)}(x) = e^x$ kaikille $n \in \mathbb{N}$, joten $f^{(n)}(0) = 1$, ja Taylorin kaava eksponenttifunktiolle on

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} + R_m(x).$$

Jäännöstermille $R_m(x)$ on voimassa

$$R_m(x) = e^c \frac{x^m}{m!},$$

missä c on lukujen x ja 0 välissä.

LAUSE 8.3. *Eksponenttifunktion Maclaurinin sarja suppenee koko reaaliakselilla ja se esittää eksponenttifunktiota, t.s. kaikille reaaliluvuille x on voimassa*

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}.$$

8.3. Logaritmi. Logaritmifunktion $x \mapsto \log x = \ln x$ Taylorin kehitelmää ei voi käyttää pisteessä $x = 0$, koska logaritmia ei ole määritelty tässä pisteessä. Käytetään funktiota $f(x) = \log(1 + x)$, joka on määritelty, kun $|x| < 1$.

Taylorin kaava voitaisiin määrätä laskemalla f:n kaikki derivaatat origossa, mutta voidaan menetellä helpomminkin. Funktion f derivaatta on $f'(x) = 1/(1 + x)$, joten geometrisen sarjan avulla saadaan

$$f'(t) = \frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + (-1)^n \frac{t^n}{1+t}.$$

Olkoon $|x| < 1$. Integroimalla puolittain saadaan

$$\log(1 + x) = \int_0^x f'(t)\, dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x),$$

missä

$$R_{n+1}(x) = \int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1+t}\, dt.$$

Koska geometrinen sarja $(1+t)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n$ suppenee välillä $(-1, 1)$, seuraa potenssisarjan termeittäin integrointia koskevasta Lauseesta 6.14, että funktion f Maclaurinin sarja suppenee välillä $(-1, 1)$.

Lisäksi Lauseesta 7.8 seuraa, että f:n astetta n oleva Taylorin polynomi on $P_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ ja sitä vastava jäännöstermi on y.o. $R_{n+1}(x)$.

LAUSE 8.4. *Funktion $f(x) = \log(1 + x)$ Maclaurin sarja suppenee, kun $-1 < x \leq 1$, ja*

$$\log(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$$

TODISTUS. Se, että sarja suppenee, kun $-1 < x < 1$, ja että summa on $\log(1+x)$, seuraa edellisestä.

Osoitetaan sarjan suppenevuus, kun $0 < x \leq 1$ käyttäen jäännöstermiä. Kun $x > 0$ ja t on välillä $[0, x]$, on $1 + t \geq 1$, joten

$$|R_{n+1}(x)| = \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\, dt \leq \int_0^x t^n\, dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Väite seuraa tästä.

Sarjan suppenevuus, kun $-1 < x < 0$, voitaisiin päätellä vastaavalla tavalla, mutta jäännöstermin arviointi on hieman hankalampaa: $|R_{n+1}(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(x+1)}$. $\square$

8.4. Arkustangentti. Arkustangentin Taylorin kehitelmä voidaan määrätä vastaavalla menetelmällä kuin logaritmin. Olkoon $f(x) = \arctan x$. Tällöin $f'(x) = 1/(1+x^2)$, joten geometrisen sarjan avulla saadaan

$$f'(t) = \frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{2n-2} + (-1)^n \frac{t^{2n}}{1+t^2}.$$

Olkoon $|x| < 1$. Integroimalla puolittain saadaan

$$\arctan x = \int_0^x f'(t)\,dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + R_{2n+1}(x),$$

missä

$$R_{2n+1}(x) = \int_0^x (-1)^n \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt.$$

Arkustangentin Maclaurinin sarjan suppenevuus saadaan samaan tapaan kuin edellä logaritmille. Jäännöstermin avulla on helppo todeta, että

$$|R_{2n+1}(x)| = \int_0^{|x|} \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt \le \int_0^{|x|} t^{2n}\,dt = \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}.$$

LAUSE 8.5. *Arkustangentin Maclaurinin sarja suppenee, kun $-1 \le x \le 1$, ja*

$$\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

8.5. Binomisarja. Binomikertoimet $\binom{n}{k}$ määritellään kertomien avulla

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!},$$

kun n ja k ovat ei-negatiivisia kokonaislukuja ja $0 \le k \le n$.

Binomikertoimille on voimassa palautuskaava (Pascalin kolmio)

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Tätä kaavaa käyttäen induktiolla on helppo osoittaa, että kaikille luvuille x ja y on voimassa ns. *binomikaava*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Erityisesti, kun valitaan $y = 1$, saadaan

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Seuraavaksi osoitamme, että tämä kaava yleistyy myös tilanteeseen, missä eksponentti n ei ole positiivinen kokonaisluku.

Kun s on reaaliluku ja k positiivinen kokonaisluku, asetetaan

$$\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)(s-2)\cdots(s-k+1)}{k!}.$$

Lisäksi sovitaan, että

$$\binom{s}{0} = 1.$$

Pascalin kolmion mukainen palautuskaava pätee myös näille yleisemmille binomikertoimille. Suoraan määritelmästä saadaan toinen palautuskaava $\binom{s}{k} = \frac{s-k+1}{k} \cdot \binom{s}{k-1}$.

Olkoon $f(x) = (1+x)^s$. Tällöin

$$\begin{aligned} f'(x) &= s(1+x)^{s-1}, \quad f'(0) = s, \\ f^{(2)}(x) &= s(s-1)(1+x)^{s-2}, \quad f^{(2)}(0) = s(s-1), \\ &\vdots \\ f^{(k)}(x) &= s(s-1)\cdots(s-k+1)(1+x)^{s-k}, \quad f^{(k)}(0) = s(s-1)\cdots(s-k+1). \end{aligned}$$

Siis funktion f astetta n oleva Taylorin polynomi on

$$P_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} x^k.$$

Lause 8.6. *Kun $|x| < 1$, on*

$$(1+x)^s = 1 + sx + \binom{s}{2} x^2 + \binom{s}{3} x^3 + \cdots + \binom{s}{n} x^n + R_{n+1}(x),$$

missä jäännöstermi

$$R_{n+1}(x) = \binom{s}{n+1} (1+c)^{s-n}\, x^{n+1}$$

jollekin lukujen x ja 0 välissä olevalle luvulle c.

Binomisarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} x^k$$

suppenee välillä $(-1, 1)$ ja esittää funktiota $(1+x)^s$.

Todistus. Jäännöstermiä koskevan väitteen todistus sivuutetaan.

Osoitetaan binomisarjan suppeneminen. Sarjan peräkkäisille termien suhteelle on

$$\left| \frac{s(s-1)\cdots(s-k)x^{k+1}}{s(s-1)\cdots(s-k+1)x^k} \, \frac{k!}{(k+1)!} \right| = \left| \frac{s-k}{k+1}\, x \right| \to |x|,$$

kun $k \to \infty$. Kun $|x| < 1$, seuraa binomisarjan itseinen suppeneminen positiivitermisten sarjojen suhdetestistä. □

9. Sovelluksia

9.1. Arkussinin Taylorin sarja. Funktion $f(x) = \arcsin x$ Maclaurinin sarja saadaan helposti derivaatan avulla. Koska $f'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$, saadaan binomisarjan avulla

$$(1-x^2)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} (-1)^k\, x^{2k}.$$

Funktion f välillä $(-1,1)$ suppeneva sarjakehitelmä löydetään integroimalla puolittain

$$\arcsin x = \int_0^x (1-t^2)^{-1/2}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$$
$$= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3\,x^5}{40} + \frac{5\,x^7}{112} + \frac{35\,x^9}{1152} + \frac{63\,x^{11}}{2816} + \cdots$$

9.2. Ellipsin kaaren pituus. Tarkastellaan ellipsiä, jonka määrää yhtälö

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Oletetaan, että $a \geq b$ (t.s. ellipsin isoakseli sijaitsee x-akselilla ja pikkuakseli y-akselilla). Ylemmässä puolitasossa olevan ellipsin osa on funktion $f\colon [-a,a] \to \mathbb{R}$, $f(x) = b\sqrt{1-x^2/a^2}$, kuvaaja. Koko ellipsin kaaren pituus on siis

$$\ell := 2\int_{-a}^{a} \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx.$$

Tässä $1+f'(x)^2 = 1+(b^2x^2/a^4)/(1-x^2/a^2)) = (1-x^2/a^2+b^2x^2/a^4)/(1-x^2/a^2)$. Käytetään apuna ellipsin *eksentrisyyttä* e, joka kuvaa ellipsin poikkeamista ympyrästä, $e = \sqrt{a^2-b^2}/a$. Tämän avulla $1+f'(x)^2 = (1-e^2x^2/a^2)/(1-x^2/a^2)$.

Integroitavan funktion parillisuuden vuoksi ellipsin kaaren pituudeksi saadaan

$$\ell = 4\int_0^a \sqrt{\frac{1-e^2x^2/a^2}{1-x^2/a^2}}\,dx = 4a\int_0^1 \sqrt{\frac{1-e^2t^2}{1-t^2}}\,dt.$$

(Jälkimmäinen yhtäsuuruus on saatu sijoituksella $x = at$.)

Sijoituksella $t = \sin\varphi$ saadaan $dt = \cos\varphi\,d\varphi$ ja $\sqrt{1-t^2} = \cos\varphi$, joten

$$\ell = 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

Saatua integraalia ei voi lausua alkeisfunktioiden avulla (paitsi tapauksissa $e=1$ ja $e=0$).

Kehitetään integraali eksentrisyyden e mukaan eteneväksi potenssisarjaksi. Aluksi käytetään binomisarjaa:

$$\sqrt{1-s} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-1)^k s^k.$$

Kun sijoitetaan $s = e^2\sin^2\varphi$ ja integroidaan, saadaan

$$\ell = 4a\sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-1)^k e^{2k} I_{2k},$$

missä $I_{2k} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2k}\varphi\,d\varphi$.

Integraaleille I_{2k} voidaan osittaisintegroinnilla johtaa palautuskaavat

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} I_{2k-2},$$

ja $I_0 = \pi/2$. Binomikertoimet $\binom{\alpha}{k}$ voidaan laskea palautuskaavalla $\binom{\alpha}{k} = \binom{\alpha}{k-1}\cdot\frac{\alpha-k+1}{k}$.

Taulukoidaan muutama ensimmäinen termi:

k	0	1	2	3	4	5	6
$\binom{1/2}{k}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{5}{128}$	$\frac{7}{256}$	$-\frac{21}{1024}$
I_{2k}	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{5\pi}{32}$	$\frac{35\pi}{256}$	$\frac{63\pi}{512}$	$\frac{231\pi}{2048}$

Tämän avulla ellipsin kaarenpituuden sarjakehitelmän alku on

$$\ell = 2\,a\,\pi - \frac{a\,e^2\,\pi}{2} - \frac{3\,a\,e^4\,\pi}{32} - \frac{5\,a\,e^6\,\pi}{128} - \frac{175\,a\,e^8\,\pi}{8192} - \frac{441\,a\,e^{10}\,\pi}{32768} - \frac{4851\,a\,e^{12}\,\pi}{524288} - \cdots$$

9.3. Raja-arvojen laskeminen. Määrätään

$$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{2x}\left(\ln\left(e^x + \frac{1}{x}\right) - \sqrt{x^2 + 2e^{-x}}\right).$$

Huomaa, että lauseke saa muodon $\infty\cdot(\infty-\infty)$, jos sijoitetaan $x = \infty$, joten raja-arvoa ei voi määrätä näin.

Logaritmin omaisuuden $\ln(e^x\,y) = \ln e^x + \ln y = x + \ln y$ nojalla saadaan

$$\ln\left(e^x + \frac{1}{x}\right) - \sqrt{x^2 + 2e^{-x}} = x + \ln\left(1 + \frac{1}{xe^x}\right) - x\sqrt{1 + 2e^{-x}/x^2}$$

Käytetään apuna sarjakehitelmiä

$$\ln(1+s) = s - \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3} + R_4(s) \quad \text{ja} \quad \sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \tilde{R}_3(t).$$

Sijoitetaan näihin $s = 1/(xe^x)$ ja $t = 2e^{-x}/x^2$. Saadaan

$$x^2 e^{2x}\left(\ln\left(e^x + \frac{1}{x}\right) - \sqrt{x^2 + 2e^{-x}}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\,x} + \frac{1}{3\,e^x\,x} + x^2 e^{2\,x}\,R_4(s) - x^3 e^{2\,x}\,\tilde{R}_3(t)$$

Taylorin kehitelmän ominaisuuksien nojalla on olemassa vakiot M ja $\tilde{M}$ siten, että

$$|R_4(s)| \le M\,|s|^4, \quad \text{ja} \quad |\tilde{R}_3(t)| \le \tilde{M}\,|t|^3,$$

kun $|s|$ ja $|t|$ ovat riittävän pieniä. Siis

$$|x^2 e^{2\,x}\,R_4(s)| \le M\,x^2 e^{2\,x}(xe^x)^{-4} = M\,x^{-2}e^{-2x} \quad \text{ja}$$
$$|x^3 e^{2\,x}\,\tilde{R}_3(t)| \le x^3 e^{2\,x}\tilde{M}\,(2e^{-x}/x^2)^3 = 8\tilde{M}\,x^{-3}e^{-x},$$

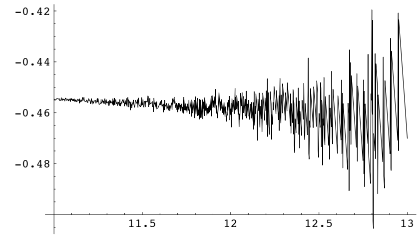
kun x on riittävän iso.

Siis

$$x^2 e^{2x}\left(\ln\left(e^x + \frac{1}{x}\right) - \sqrt{x^2 + 2e^{-x}}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\,x} + \frac{1}{3\,e^x\,x} + x^2 e^{2\,x}\,R_4(s) - x^3 e^{2\,x}\,\tilde{R}_3(t) \to -\frac{1}{2},$$

kun $x \to \infty$.

Huomautus 9.1. Raja-arvon määrääminen numeerisesti laskemalla on hankalaa. Esimerkiksi, jos $x = 12$, ovat lausekkeet $x^2 e^{2x}\ln\left(e^x + \frac{1}{x}\right)$ ja $x^2 e^{2x}\sqrt{x^2 + 2e^{-x}}$ kumpikin arvoltaan n. $4.5773204993427\cdot 10^{13}$. Viereisessä kuvassa on yritetty piirtää erotuksen kuvaaja välillä $[11, 13]$. Numeeriset virheet ovat suuria eikä oikea raja-arvo ole vielä lähelläkään.



LUKU 2

Vektorimuuttujan funktioiden differentiaalilaskentaa

1. Vektoriarvoiset funktiot (käyrät)

1.1. Taso- ja avaruuskäyrä.

MÄÄRITELMÄ 1.1. *Parametrisoitu tasokäyrä* on kuvaus reaaliakselin väliltä I tasoon $\mathbb{R}^2$, $t \mapsto (x(t), y(t))$. Tätä kuvausta kutsutaan myös käyrän *parametriesitykseksi.* Funktiot $x\colon I \to \mathbb{R}$ ja $y\colon I \to \mathbb{R}$ ovat käyrän *koordinaattikuvauksia.*

Parametrisoitu avaruuskäyrä on kuvaus reaaliakselin väliltä I kolmiulotteiseen avaruuteen $\mathbb{R}^3$, $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$.

Käyrä on *jatkuva (pisteessä t_0)*, jos sen koordinaattikuvaukset ovat jatkuvia (pisteessä t_0).

Käyrä on *derivoituva (pisteessä t_0)*, jos sen koordinaattikuvaukset ovat derivoituvia (pisteessä t_0).

Seuraavassa käyriä merkitään kreikan kielen pienillä kirjaimilla.[1]

ESIMERKKI 1.2. Olkoon $f\colon I \to \mathbb{R}$ annettu funktio. Tällöin $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (t, f(t))$, on parametrisoitu tasokäyrä. Huomaa, että käyrän α kuvajoukko on sama kuin funktion f kuvaaja: $\alpha(I) = \{\alpha(t) \mid t \in I\} = \{(t, f(t)) \mid t \in I\}$.

Tarkastellaan erityisesti neliöjuurifunktiota $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$. Funktion f kuvaajalle on parametriesitys $\alpha\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, \sqrt{t})$.

Mutta myös parametrisoitu käyrä $\beta\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\beta(s) = (s^2, \sqrt{s^2}) = (s^2, s)$ esittää samaa käyrää. Tämä kannattaa tulkita niin, että $\alpha(t)$ ja $\beta(s)$ liikkuvat pitkin samaa käyrää, mutta eri vauhdilla. Itse asiassa, käyrä β saadaan käyrästä α (aidosti kasvavalla) muuttujanvaihdoilla $t = s^2$: $\beta(s) = \alpha(s^2)$.

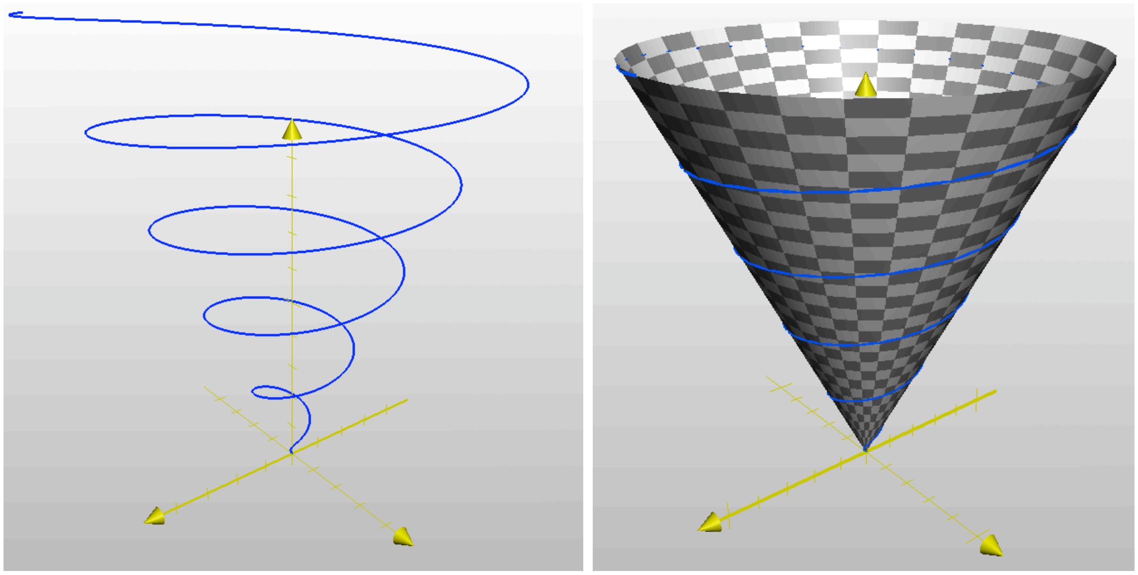
ESIMERKKI 1.3. Olkoon $P = (p, q)$ tason piste ja $V = (u, v)$ tasovektori. Tällöin käyrä $\alpha\colon R \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = P + tV$, esittää suoraa, joka hetkellä $t = 0$ kulkee pisteen P kautta, ja joka on vektorin V suuntainen (kunhan $V \neq (0,0)$; jos $V = (0,0)$, on α vakiofunktio).

ESIMERKKI 1.4. Olkoot a ja b annettuja positiivilukuja. Käyrä $\alpha\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$,

$$\alpha(t) = (a\cos t, b\sin t),$$

on ellipsin $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ parametriesitys. Erityisesti $t \mapsto (a\cos t, a\sin t)$ on a-säteisen ympyrän $x^2 + y^2 = a^2$ parametriesitys.

[1]Kreikan kielen aakkosto a:sta o:hon (iso ja pieni kirjain):
A α alfa, B β beeta, Γ γ gamma, Δ δ delta, E ε epsilon, Z ζ dzeeta, H η eeta, Θ θ (tai ϑ) theeta, I ι joota, K κ kappa, Λ λ lambda, M μ myy, N ν nyy, Ξ ξ ksii, O o omikron, Π π pii, P ϱ rho, Σ σ sigma, T τ tau, Υ υ ypsilon, Φ φ fii, X χ khii, Ψ ψ psii, Ω ω oomega.



Kuva 1. Parametrisoitu käyrä $t \mapsto (at\cos t, at\sin t, bt)$, $0 \le t \le 2\pi$.

Esimerkki 1.5. Olkoon a annettu positiiviluku. Käyrä $\alpha\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^2$,

$$\alpha(t) = (a(t-\sin t), a(1-\cos t)),$$

on nimeltään *sykloidi*. Sykloidi syntyy, kun a-säteinen ympyrä pyörii liukumatta pitkin x-akselia. Piste $\alpha(t)$ on ympyrän kehältä valitun pisteen piirtämä rata.

Esimerkki 1.6 (Napakoordinaateissa annettu käyrä). Olkoon $r\colon I \to \mathbb{R}$ annettu funktio, jonka arvot ovat positiivisia. Käyrä $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2$,

$$\alpha(\theta) = (r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta),$$

on käyrä, jolle pisteen $\alpha(\theta)$ etäisyys origosta on $r(\theta)$ ja pisteen $\alpha(\theta)$ ja x-akselin välinen kulma on θ.

Esimerkki 1.7. Olkoot a ja b annettuja positiivilukuja. Käyrä $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,

$$\alpha(t) = (at\cos t, at\sin t, bt),$$

on spiraali. Käyrän pisteet toteuttavat yhtälön $b^2(x^2+y^2) = a^2z^2$ (kartio).

1.2. Käyrän tangentti- ja normaalivektorit.

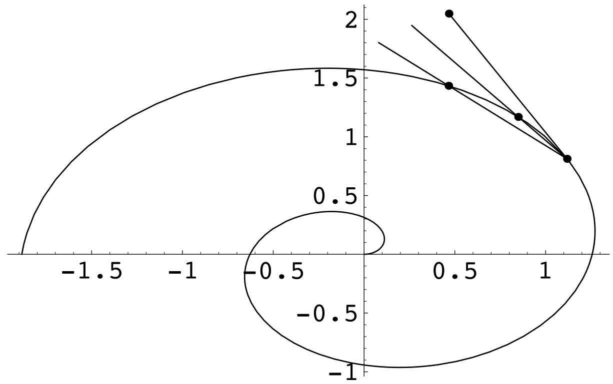
Määritelmä 1.8. Olkoot $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2$ derivoituva parametrisoitu tasokäyrä, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, ja $t_0 \in I$. Käyrän *derivaatta pisteessä* t_0 on

$$\alpha'(t_0) = \frac{d\alpha}{dt}(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)).$$

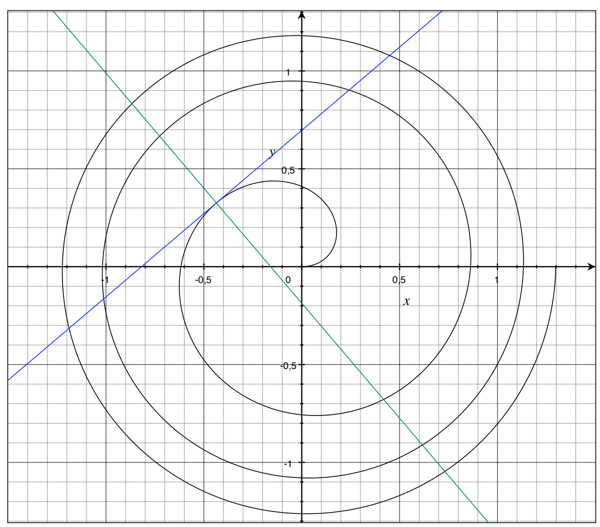
Avaruuskäyrän derivaatta määritellään vastaavasti.

Määritelmä 1.9. Olkoot $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^n$ derivoituva parametrisoitu taso- tai avaruuskäyrä ja $t_0 \in I$.

Vektori $\alpha'(t_0)$ on käyrän *tangenttivektori* (tai *nopeusvektori*) hetkellä t_0. Nopeusvektorin pituus $\|\alpha'(t_0)\|$ on käyrän *vauhti* hetkellä t_0.



KUVA 2. Parametrisoitu käyrä $t \mapsto (at \cos t, at \sin t)$ sekä käyrän tangenttivektori ja kaksi erotusosamäärävektoria.



KUVA 3. Parametrisoitu käyrä $t \mapsto (r(t) \cos t, r(t) \sin t)$, missä $r(t) = \log(t+1)$, sekä käyrän tangentti ja normaali hetkellä $t_0 = 2.5$.

Oletetaan, että $\alpha'(t_0) \neq 0$. Parametrisoitu käyrä $\beta \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\beta(t) = \alpha(t_0) + \alpha'(t_0)(t - t_0)$, on käyrän *tangentti* hetkellä t_0.

Jos $\alpha \colon I \to \mathbb{R}^n$ on kaksi kertaa derivoituva, sanotaan toista derivaattaa $\alpha''(t_0)$ käyrän *kiihtyvyysvektoriksi* hetkellä t_0.

MÄÄRITELMÄ 1.10. Olkoot $\alpha \colon I \to \mathbb{R}^2$ derivoituva parametrisoitu tasokäyrä ja $t_0 \in I$. Olkoot α:n koordinaattifunktiot x ja y.

Oletetaan, että $\alpha'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0,0)$. Vektori $N = (-y'(t_0), x'(t_0))$ on käyrän *normaalivektori* hetkellä t_0.

Käyrän pisteen $\alpha(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$ kulkeva *normaali* on parametrisoitu käyrä $s \mapsto \alpha(t_0) + s\, N = (x(t_0), y(t_0)) + s\, (-y'(t_0), x'(t_0))$.

Huomaa, että kaikki vektorit $V = (u, v)$, jotka ovat kohtisuorassa vektoria $\alpha'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$ vastaan, toteuttavat yhtälön $\alpha'(t_0) \cdot V = x'(t_0)u + y'(t_0)v = 0$. Yksi tämän ratkaisuista on vektori $N = (-y'(t_0), x'(t_0))$. Jos $\alpha'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0,0)$, niin yhtälön kaikki ratkaisut saadaan vektorin $N = (-y'(t_0), x'(t_0))$ monikertoina.

LAUSE 1.11. *Olkoot α, $\beta \colon I \to \mathbb{R}^3$ derivoituvia käyriä ja $f \colon I \to \mathbb{R}$ sekä $g \colon J \to I$ derivoituvia funktioita. Tällöin*

a) $\dfrac{d}{dt}\big(\alpha(t) + \beta(t)\big) = \alpha'(t) + \beta'(t)$

b) $\dfrac{d}{dt}\big(f(t)\alpha(t)\big) = f'(t)\alpha(t) + f(t)\alpha'(t)$

c) $\dfrac{d}{dt}\big(\alpha(t) \cdot \beta(t)\big) = \alpha'(t) \cdot \beta(t) + \alpha(t) \cdot \beta'(t)$
($\cdot$ tarkoittaa vektoreiden piste- eli sisätuloa)

d) $\dfrac{d}{dt}\big(\alpha(t) \times \beta(t)\big) = \alpha'(t) \times \beta(t) + \alpha(t) \times \beta'(t)$
($\times$ tarkoittaa vektoreiden ristituloa)

e) $\dfrac{d}{ds}\big(\alpha(g(s))\big) = \alpha'(g(s))g'(s)$

f) $\dfrac{d}{dt}\|\alpha(t)\| = \dfrac{\alpha(t) \cdot \alpha'(t)}{\|\alpha(t)\|}$, *jos $\alpha(t) \neq 0$*

TODISTUS. Jätetään harjoitustehtäväksi. □

HUOMAUTUS 1.12. Derivoituvan käyrän $\alpha \colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ kaarenpituus määritellään integraalina

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\|\, dt.$$

Jos käyrä on annettu napakoordinaattimuodossa, $\alpha(\theta) = (r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)$, niin käyrän kaarenpituus on

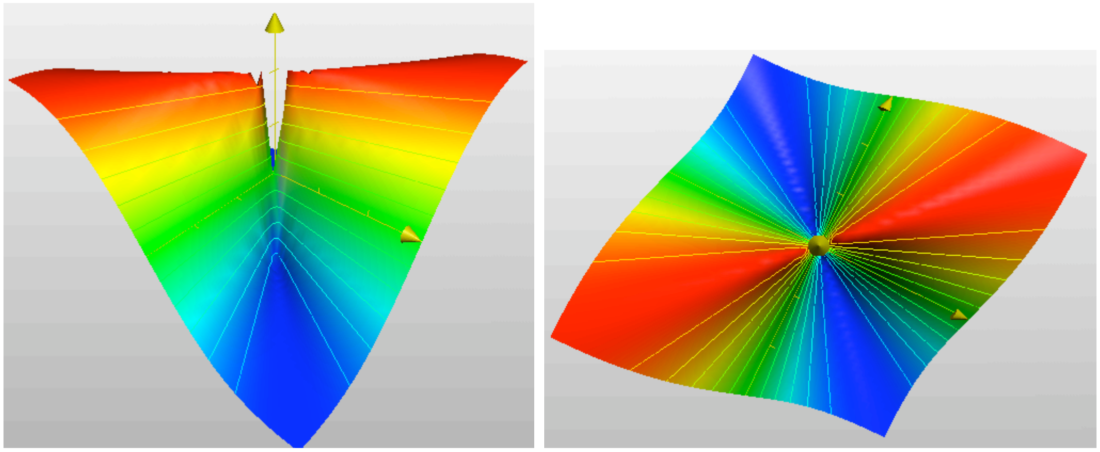
$$\int_a^b \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}\, d\theta.$$

ESIMERKKI 1.13. Käyrä, jota napakoordinaateissa esittää yhtälö

$$r = r(\theta) = a(1 - \cos\theta),$$

missä a on positiivinen vakio, on nimeltään *kardioidi*. Kardioidin pituus on (symmetriasyistä integrointi voidaan rajoittaa välille $[0, \pi]$)

$$\begin{aligned}
2\int_0^\pi \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}\, d\theta &= 2\int_0^\pi \sqrt{a^2(1-\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta}\, d\theta \\
&= 2a\int_0^\pi \sqrt{1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta}\, d\theta \\
&= 2a\int_0^\pi \sqrt{2 - 2\cos\theta}\, d\theta \\
&= 2a\int_0^\pi \sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta \qquad \text{koska } 1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2} \\
&= 4a\int_0^\pi \sin\frac{\theta}{2}\, d\theta = 4a\Big|_0^\pi - 2\cos\frac{\theta}{2} = 8a.
\end{aligned}$$



KUVA 4. Funktion $(x, y) \mapsto \frac{2x\,y}{x^2+y^2}$ kuvaaja sivulta ja päältäpäin katsottuna.

2. Kahden muuttujan funktiot

Tarkastellaan kahden muuttujan reaaliarvoisia funktioita $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Kahden muuttujan funktiota havainnollistetaan tavallisesti sen *kuvaajalla* tai *tasa-arvokäyrillä* tai näiden yhdistelmällä.

Funktion f *kuvaaja* koostuu kaikista muotoa

$$(x, y, f(x, y))$$

olevista pisteistä, missä (x, y) käy läpi kaikki f määrittelyjoukon pisteet (jos määrittelyjoukko on rajoittamaton, pitää rajata sopiva osajoukko).

Funktion f *tasa-arvokäyriä* ovat yhtälön

$$f(x, y) = c$$

määrittelemät tasokäyrät. Tässä c on annettu reaaliluku. Tavallisesti samaan kuvaan piirretään useita eri c:n arvoja vastaavia käyriä.[2]

Funktion f kuvaaja ja tasa-arvokäyriä voidaan piirtää myös samaan kuvaan ”nostamalla” tasa-arvokäyrät oikealle korkeudelle, t.s. piirretään f:n kuvaaja sekä sen ja tasojen $z = c$ leikkauskäyriä.

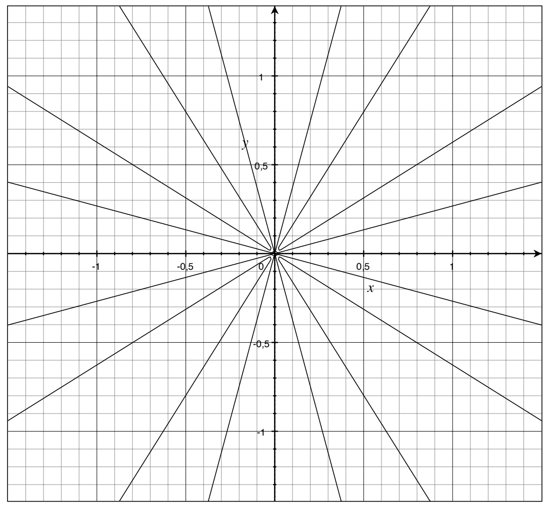
ESIMERKKI 2.1. Olkoon $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \frac{2x\,y}{x^2 + y^2}, \quad \text{kun } (x, y) \neq 0, \text{ ja} \quad f(0, 0) = 0.$$

Kuvassa 4 on f:n kuvaaja nähtynä sivulta ja ylhäältä. Kuvaajiin on myös liitetty f:n tasa-arvokäyriä (vaaleita käyriä). Kuvassa 5 on kokoelma f:n tasa-arvokäyriä. Kuvista voi päätellä, että funktiolla f on vakioarvo pitkin jokaista origon kautta kulkevaa suoraa. Tämä nähdään myös laskemalla. Pitkin y-akselia on $x = 0$ ja

$$f(0, y) = \frac{2 \cdot 0 \cdot y}{0^2 + y^2} = 0, \quad \text{kun } y \neq 0.$$

[2]Tasa-arvokäyrillä on useita eri nimiä tilanteesta riippuen. Esimerkiksi, jos f kuvaa potentiaalienergiaa, kutsutaan tasa-arvokäyriä tasapotentiaalikäyriksi, ja jos f kuvaa lämpötilaa, kutsutaan tasa-arvokäyriä isotermeiksi.



KUVA 5. Funktion $(x, y) \mapsto \frac{2x\,y}{x^2+y^2}$ tasa-arvokäyriä.

Muut origon kautta kulkevat suorat voidaan esittää muodossa $y = kx$, missä k on reaaliluku. Nyt

$$f(x, kx) = \frac{2x\,kx}{x^2 + (kx)^2} = \frac{2k}{1 + k^2}, \quad \text{kun } x \neq 0.$$

Suoralla $y = x$ funktiolla on vakioarvo $f(x, x) = 1$ $(k = 1)$ ja suoralla $y = -x$ vakioarvo $f(x, -x) = -1$ $(k = -1)$. Muualla $|f(x, y)| < 1$. Koordinaattiakseleilla funktio saa arvon nolla. Erityisesti, jokaista arvoa c, jolle $|c| \leq 1$, kohti löytyy piste (x, y), missä $f(x, y) = c$. Lisäksi piste (x, y) voidaan valita mielivaltaisen läheltä origoa $(0, 0)$.

2.1. Avoin ja suljettu joukko. Reaaliakselilla määritellyille funktioille luonnollisin määrittelyjoukko on väli (avoin, suljettu tai puoliavoin). Kahden muuttujan funktioille avointa väliä vastaava joukko olisi avoin suorakaide

$$(a, b) \times (c, d) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b,\ c < y < d\}$$

tai avoin pallo (ympyrä)

$$B((x_0, y_0), r) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}.$$

MÄÄRITELMÄ 2.2. Tason $\mathbb{R}^2$ osajoukko A on *avoin*, jos jokaista sen pistettä $(x_0, y_0) \in A$ kohti on olemassa luku $r > 0$ siten, että piste (x_0, y_0)-keskinen, r-säteinen avoin pallo sisältyy joukkoon A, $B((x_0, y_0), r) \subset A$.

Joukko $S \subset \mathbb{R}^2$ on *suljettu*, jos sen komplementtijoukko $\mathbb{R}^2 \setminus S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \notin S\}$ on avoin.

Huomaa, että käsitettä ”puoliavoin joukko” tason osajoukoille **ei määritellä**.

MÄÄRITELMÄ 2.3. Olkoot D tason $\mathbb{R}^2$ osajoukko ja $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Piste (x_0, y_0) on joukon D *reunapiste*, jos jokaiselle $r > 0$ pallossa $B((x_0, y_0), r)$ on sekä D:n että sen komplementin $\mathbb{R}^2 \setminus D$ pisteitä.

Joukon D *reuna* on kaikkien D:n reunapisteiden muodostama joukko.

ESIMERKKI 2.4. Avoin suorakaide $(a,b) \times (c,d)$ ja avoin pallo $B((x_0,y_0),r)$ ovat avoimia joukkoja.

Vastaavasti suljettu suorakaide

$$[a,b] \times [c,d] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$$

ja suljettu pallo

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq r^2\}$$

ovat suljettuja joukkoja.

Avoimella suorakaiteella $(a,b) \times (c,d)$ ja suljetulla suorakaiteella $[a,b] \times [c,d]$ on sama reuna, joka koostuu neljästä janasta (piirrä kuva)

$$([a,b] \times \{c\}) \cup ([a,b] \times \{d\}) \cup (\{a\} \times [c,d]) \cup (\{b\} \times [c,d]).$$

Avoimella pallolla $B((x_0,y_0),r)$ ja vastaavalla suljetulla pallolla on sama reuna

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2\}$$

2.2. Raja-arvo.

MÄÄRITELMÄ 2.5. Olkoot $D \subset \mathbb{R}^2$, $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, r annettu reaaliluku ja $f\colon D \to \mathbb{R}$ annettu funktio. Funktiolla f on *raja-arvo r pisteessä* (x_0,y_0) eli

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = r,$$

jos seuraavat ehdot toteutuvat:

(i) pisteen (x_0,y_0) läheltä tulee löytyä joukon D pisteitä $(x,y) \neq (x_0,y_0)$, ja
(ii) funktion f arvojen $f(x,y)$ tulee olla lähellä lukua r, kun (x,y) on lähellä pistettä (x_0,y_0) ja $(x,y) \neq (x_0,y_0)$.

Teknisemmin määritelmä voidaan esittää seuraavasti:

(i) jokaiselle $\varepsilon > 0$ pallosta $B((x_0,y_0),\varepsilon)$ tulee löytyä joukon D pisteitä $(x,y) \neq (x_0,y_0)$, ja
(ii) jokaista $\varepsilon > 0$ kohti pitää löytyä $\delta > 0$ siten, että $|f(x,y) - r| < \varepsilon$, kun $(x,y) \in D$, $(x,y) \neq (x_0,y_0)$ ja pisteiden (x,y) ja (x_0,y_0) etäisyys $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ on pienempi kuin δ.

2.3. Jatkuvuus.

MÄÄRITELMÄ 2.6. Olkoot $D \subset \mathbb{R}^2$, $(x_0,y_0) \in D$ ja $f\colon D \to \mathbb{R}$ annettu funktio. Funktio f on *jatkuva pisteessä* (x_0,y_0), jos

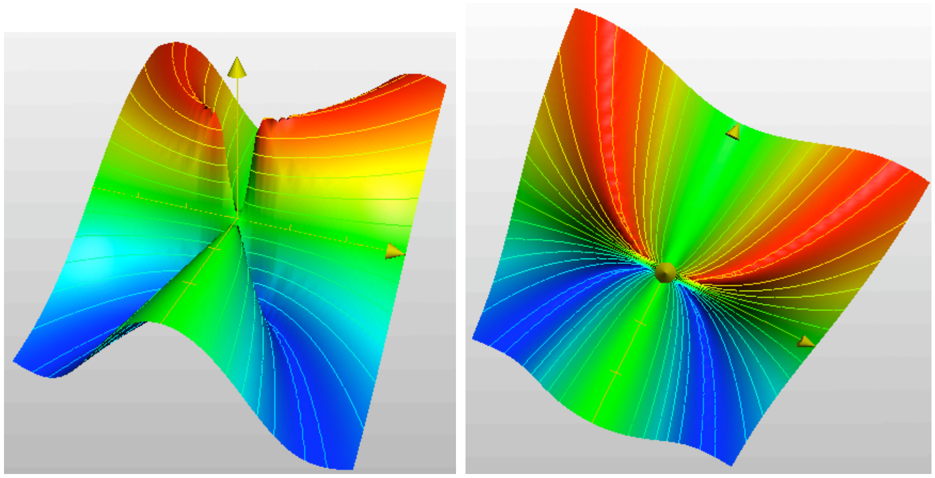
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Funktio f on *jatkuva*, jos f on jatkuva jokaisessa D:n pisteessä.

Funktion jatkuvuus on yleensä helpompaa tarkistaa tavanomaisilla laskusäännöillä kuin suoraan määritelmästä. Laskusäännöt kylläkin pitäisi todistaa määritelmän pohjalta, mutta nämä todistukset sivuutetaan.

Jos funktiot f ja g ovat jatkuvia pisteessä (x_0,y_0) ja r on reaaliluku, niin

1° $rf\colon (x,y) \mapsto r\,f(x,y)$ on jatkuva pisteessä (x_0,y_0);
2° $f+g\colon (x,y) \mapsto f(x,y) + g(x,y)$ on jatkuva pisteessä (x_0,y_0);
3° $fg\colon (x,y) \mapsto f(x,y)\,g(x,y)$ on jatkuva pisteessä (x_0,y_0);



Kuva 6. Funktion $(x,y) \mapsto \frac{2x^2\,y}{x^4+y^2}$ kuvaaja sivulta ja päältäpäin katsottuna.

4° $\dfrac{f}{g}\colon (x,y) \mapsto \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$ on jatkuva pisteessä (x_0,y_0), jos $g(x_0,y_0) \neq 0$.

Jos lisäksi g_1 ja g_2 ovat jatkuvia pisteessä (u_0,v_0) ja $g_1(u_0,v_0) = x_0$ sekä $g_2(u_0,v_0) = y_0$, niin

5° yhdistetty funktio $(u,v) \mapsto f(g_1(u,v), g_2(u,v))$ on jatkuva pisteessä (u_0,v_0).

Lisäksi jatkuva yhden muuttujan funktio on jatkuva tulkittuna kahden muuttujan funktioksi, t.s. jos $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva pisteessä t_0, niin

6° $(t,y) \mapsto h(t)$, $[a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on jatkuva pisteessä (t_0,y_0) kaikille y_0;
7° $(x,t) \mapsto h(t)$, $\mathbb{R} \times [a,b] \to \mathbb{R}$, on jatkuva pisteessä (x_0,t_0) kaikille x_0.

Esimerkki 2.7. Olkoon $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \frac{2x^2\,y}{x^4+y^2}, \quad \text{kun } (x,y) \neq (0,0), \text{ ja} \quad f(0,0) = 0.$$

Funktio f jatkuva kaikkialla muualla paitsi ehkä origossa, koska origo on nimittäjän ainoa nollakohta ja f on yhdistetty y.o. laskusääntöjen mukaisesti jatkuvista funktioista käyttäen neljää ensimmäistä sääntöä.

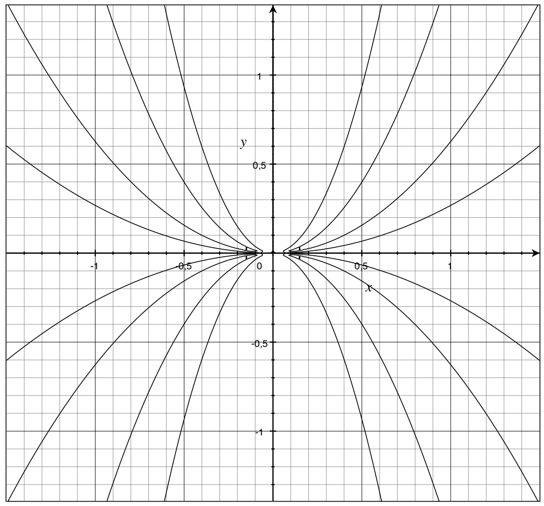
Funktio f ei ole jatkuva origossa: Lähestyttäessä origoa pitkin koordinaattiakseleita on $f(x,0) = 0$ (y-akseli) ja $f(0,y) = 0$ (x-akseli). Kun tarkastellaan f:n arvoja pitkin paraabeleita $y = ax^2$, nähdään, että

$$f(x,ax^2) = \frac{2x^2\,ax^2}{x^4+(ax^2)^2} = \frac{2a}{1+a^2}, \quad \text{kun } x \neq 0.$$

Siis funktiolla f on vakioarvo jokaisella paraabelilla. Erityisesti, $f(x,x^2) = 1$, $f(x,-x^2) = -1$ ja $f(x,0) = 0$, joten origon lähellä f:n arvot ”hyppivät” arvojen -1 ja 1 välillä eikä f voi olla jatkuva origossa. Itse asiassa funktiolla f ei edes ole raja-arvoa origossa.

Jos funktion käyttäytymistä tarkastellaan pitkin origon kautta kulkevia suoria, nähdään, että

$$f(x,kx) = \frac{2x^2\,kx}{x^4+(kx)^2} = \frac{2kx}{x^2+k^2} \to 0, \quad \text{kun } x \to 0 \text{ ja } k \neq 0.$$



KUVA 7. Funktion $(x, y) \mapsto \frac{2x^2 y}{x^4+y^2}$ tasa-arvokäyrät ovat paraabeleita $y = ax^2$, $a \neq 0$, ja koordinaattiakselit.

Kun $k = 0$, on $f(x, 0) = 0$. Samoin on $f(0, y) = 0$. Siis jokaisella funktion f rajoittumalla origon kautta kulkevalle suoralle on raja-arvo nolla origossa. Mutta **tämä ei riitä** sille, että funktiolla on "oikea" raja-arvo.

3. Osittaisderivaatta

3.1. Osittaisderivaatta.

MÄÄRITELMÄ 3.1. Olkoot $A \subset \mathbb{R}^2$ avoin joukko, $f\colon A \to \mathbb{R}$ annettu funktio ja $(x_0, y_0) \in A$. Funktion f *osittaisderivaatta ensimmäisen muuttujan suhteen pisteessä* (x_0, y_0) on erotusosamäärän raja-arvo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = D_1 f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

edellyttäen, että raja-arvo on olemassa.

Vastaavasti, f:n *osittaisderivaatta toisen muuttujan suhteen pisteessä* (x_0, y_0) on

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = D_2 f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

edellyttäen, että raja-arvo on olemassa.[3]

[3]"Tämän sijasta me saksalaiset käytämme Jacobin mukaisesti pyöreätä ∂ osittaisderivaatalle." (Karl Weierstrass, 1874; Weierstrass (1815–1897).) Nykyinen merkintätapa osittaisderivaatalle lienee peräisin Carl Gustav Jacob Jacobilta (1804–1851) vuodelta 1827. Anglosaksisissa maissa käsin tai koristeellisemmalla kirjasinlajilla kirjoitetussa tekstissä d-kirjaimen yläsakara on ollut tapana taivuttaa vasemmalle ylös. Vastaava esiintyy edelleen venäjän kielessä käsin kirjoitettaessa tai kursiivikirjasimella kirjoitetussa tekstissä.
Merkintä df/dx derivaatalle on peräisin Gottfried Wilhelm von Leibnizilta (1646–1716), Df Augustin Louis Cauchylta (1789–1857) ja f' Joseph Louis Lagrangelta (1736–1813). Sir Isaac Newton (1642–1727) käytti merkintää $\dot{x}$, ja kutsui tätä x:n fluksioksi. Suure x puolestaan oli fluentti.

$$\frac{\partial f}{\partial x} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} \qquad \frac{\boldsymbol{\mathfrak{d}}\boldsymbol{\mathfrak{f}}}{\boldsymbol{\mathfrak{d}}\boldsymbol{\mathfrak{x}}} \qquad \frac{\delta \mathfrak{f}}{\delta \mathfrak{x}} \qquad \frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}}$$

Kuva 8. Osittaisderivaattoja.

Osittaisderivaatta on tavallinen derivaatta, kun funktion toinen muuttuja tulkitaan vakioksi. Näin ollen kaikki tavalliset derivoimissäännöt ovat käytettävissä poislukien ketjusääntö eli yhdistetyn funktion derivoimissääntö (johon palataan myöhemmin). Huomaa, että kahden muuttujan funktiolle ”toispuoleista” derivaattaa määrittelyjoukon reunapisteissä **ei määritellä**.

Esimerkki 3.2. Olkoot $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0\}$ ja $f\colon A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^y = e^{y \log x}$. Tällöin

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{y \log x} \frac{\partial y \log x}{\partial y} = x^y \log x.$$

Esimerkki 3.3. Olkoon

$$f(x,y) = \frac{2x\,y}{x^2+y^2}, \quad \text{kun } (x,y) \neq 0.$$

Tällöin kaikissa pisteissä $(x,y) \neq (0,0)$ on

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2\,y}{x^2+y^2} + \frac{-4\,x^2\,y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2\,(x^2\,y - y^3)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2\,x}{x^2+y^2} + \frac{-4\,x\,y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2\,(x^3 - x\,y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Esimerkki 3.4. Olkoon

$$f(x,y) = \frac{2x^2\,y}{x^4+y^2}, \quad \text{kun } (x,y) \neq (0,0).$$

Tällöin kaikissa pisteissä $(x,y) \neq (0,0)$ on

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{4\,x\,y}{x^4+y^2} + \frac{-8\,x^5\,y}{(x^4+y^2)^2} = \frac{-4\,(x^5\,y - x\,y^3)}{(x^4+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2\,x^2}{x^4+y^2} + \frac{-4\,x^2\,y^2}{(x^4+y^2)^2} = \frac{2\,(x^6 - x^2\,y^2)}{(x^4+y^2)^2}.$$

Määritelmä 3.5. Olkoot $A \subset \mathbb{R}^2$ avoin joukko ja $f\colon A \to \mathbb{R}$ annettu funktio. Funktio f on *jatkuvasti derivoituva*, jos f:llä on osittaisderivaatat $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ kaikissa A:n pisteissä (x,y) ja funktiot

$$\frac{\partial f}{\partial x}\colon A \to \mathbb{R} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial f}{\partial y}\colon A \to \mathbb{R}$$

ovat jatkuvia.

3.2. Suuntaisderivaatta.

MÄÄRITELMÄ 3.6. Olkoot $A \subset \mathbb{R}^2$ avoin joukko, $(x_0, y_0) \in A$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ annettu funktio ja $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ yksikkövektori (t.s. $u^2 + v^2 = 1$). Funktion f *suuntaisderivaatta vektorin* (u, v) *suuntaan pisteessä* (x_0, y_0) on

$$\partial_{(u,v)} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hu, y_0 + hv) - f(x_0, y_0)}{h},$$

edellyttäen, että raja-arvo on olemassa.

Funktion f suuntaisderivaatat koordinaattiakselien suuntaisten yksikkövektoreiden suuntiin ovat osittaisderivaatat

$$\partial_{(1,0)} f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \partial_{(0,1)} f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

3.3. Differentioituvuus. Palautetaan mieleen seuraava tulos yhden muuttujan funktioiden differentiaalilaskennasta: Funktio $f = f(x)$ on derivoituva pisteessä x_0, jos ja vain jos sillä pisteessä x_0 on differentiaalikehitelmä

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = ah + h\varrho(h),$$

missä ϱ on funktio, jolle $\varrho(h) \to 0$, kun $h \to 0$. Differentiaalikehitelmän luku $a = f'(x_0)$. Kehitelmän ehto merkitsee, että f:n arvoja pisteen x_0 lähellä voidaan approksimoida lineaarisella funktiolla $x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

MÄÄRITELMÄ 3.7. Olkoot $A \subset \mathbb{R}^2$ avoin joukko, $(x_0, y_0) \in A$ ja $f\colon A \to \mathbb{R}$ annettu funktio. Funktio f on *differentioituva pisteessä* (x_0, y_0), jos f:llä on pisteessä (x_0, y_0) *differentiaalikehitelmä*, t.s. jos on olemassa luvut a ja b siten, että

$$f(x_0 + s, y_0 + t) - f(x_0, y_0) = as + bt + \|(s, t)\|\varrho(s, t),$$

missä ϱ on funktio, jolle $\varrho(s, t) \to 0$, kun $\|(s, t)\| \to 0$.

LAUSE 3.8. *Jos funktio $f\colon A \to \mathbb{R}$ on differentioituva pisteessä (x_0, y_0), niin f:llä on osittaisderivaatat $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ ja differentiaalikehitelmän luvut a ja b ovat*

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

LAUSE 3.9. *Jos funktio $f\colon A \to \mathbb{R}$ on differentioituva pisteessä (x_0, y_0), niin f:llä on suuntaisderivaatat kaikkien yksikkövektorien (u, v) suuntiin ja*

$$\partial_{(u,v)} f(x_0, y_0) = u\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + v\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

LAUSE 3.10. *Olkoot $A \subset \mathbb{R}^2$ avoin joukko ja $f\colon A \to \mathbb{R}$ annettu funktio. Oletetaan, että f on jatkuvasti derivoituva. Tällöin f on differentioituva jokaisessa A:n pisteessä.*

LAUSE 3.11. *Olkoot $A \subset \mathbb{R}^2$ avoin joukko ja $f\colon A \to \mathbb{R}$ annettu funktio. Oletetaan, että f on differentioituva. Tällöin f on jatkuva.*

Funktio, jolla on molemmat osittaisderivaatat, ei välttämättä ole edes jatkuva. Differentioituvuuden yksi tärkeä ominaisuus on se, että se takaa jatkuvuuden lisäksi funktion approksimoitavuuden lineaarisella funktiolla

$$(x, y) \mapsto f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Geometrisesti tilanne tarkoittaa seuraavaa: Tarkastellaan funktion f kuvaajaa, joka koostuu pisteistä $(x, y, f(x, y))$. Olkoot α ja β käyrät

$$\alpha(x) = (x, y_0, f(x, y_0)), \qquad \beta(y) = (x_0, y, f(x_0, y)).$$

Näiden käyrien tangenttivektorit ovat tangenttivektoreita f:n kuvaajan muodostamalle kaksiulotteiselle pinnalle. Erityisesti pisteessä $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, missä käyrät leikkaavat toisensa, tangenttivektorit ovat ovat

$$\alpha'(x_0) = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)), \qquad \beta'(y_0) = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)).$$

Jos funktiolla f on osittaisderivaatat $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, niin f:n kuvaajalla on tangenttitaso, jolla on parametriesitys

$$\begin{aligned}(x, y) \mapsto\ & (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) + \alpha'(x_0)(x - x_0) + \beta'(y_0)(y - y_0) \\ &= \big(x, y, f(x_0, y_0) + (x - x_0)\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\big).\end{aligned}$$

Differentioituvalle funktiolle tangenttitaso approksimoi funktion kuvaajaa "hyvin".

Funktion f differentiaalikehitelmän sijasta käytetään monesti muodollista esitystä

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy.$$

Esiintyvät differentiaalit df, dx ja dy on käsiteltävissä täsmällisestikin, mutta tässä esityksessä tähän ei puututa. Muinaisessa differentiaalien käsittelytavassa ne ajateltiin k.o. suureen "äärettömän pieniksi" (eli infinitesimaalisiksi) muutoksiksi.

Funktion erilaiset derivoituvuuskäsitteet suhtautuvat toisiinsa seuraavasti:

$$\begin{gathered}f \text{ on jatkuvasti derivoituva} \\ \Downarrow \\ f \text{ on differentioituva} \\ \Downarrow \\ f\text{:llä on suuntaisderivaatat kaikkiin suuntiin} \\ \Downarrow \\ f\text{:llä on molemmat osittaisderivaatat}\end{gathered}$$

Mikään yllä olevista implikaatioista ei ole käännettävissä. Esimerkiksi funktiolla

$$f(x, y) = \frac{2x\,|y|}{x^2 + y^2}, \quad \text{kun } (x, y) \neq 0, \text{ ja} \quad f(0, 0) = 0,$$

on origossa molemmat osittaisderivaatat, mutta f:llä ei ole suuntaisderivaattaa kaikkiin suuntiin.

Vastaavasti funktiolla

$$f(x,y)=\frac{2x^2\,y}{x^4+y^2},\quad \text{kun } (x,y)\neq(0,0), \text{ ja} \quad f(0,0)=0,$$

on origossa suuntaisderivaatat kaikkiin suuntiin, mutta f ei ole differentioituva.

LAUSE 3.12 (Ketjusääntö). *Olkoot $A\subset\mathbb{R}^2$ avoin joukko ja $f\colon A\to\mathbb{R}$ differentioituva funktio. Olkoot $I\subset\mathbb{R}$ avoin väli ja $(x,y)\colon I\to\mathbb{R}^2$ derivoituva käyrä siten, että $(x(t),y(t))\in A$ kaikille $t\in I$.*

Tällöin yhdistetty funktio $t\mapsto f(x(t),y(t))$ on derivoituva ja

$$\frac{d}{dt}f(x(t),y(t))=\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))x'(t)+\frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))y'(t),$$

t.s.

$$\frac{d}{dt}f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{dy}{dt}.$$

TODISTUS. Käytetään apuna funktion f differentiaalikehitelmää.

Olkoot

$$a=\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t)),\quad b=\frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t)).$$

Merkitään $u=x(t+h)-x(t)$ ja $v=y(t+h)-y(t)$ (u ja v ovat f:n differentiaalikehitelmän luvut s ja t).

Koska x on derivoituva, on

$$\frac{u}{h}=\frac{x(t+h)-x(t)}{h}\to x'(t),\quad \text{kun } h\to 0.$$

Vastaavasti $v/h\to y'(t)$, kun $h\to 0$.

Funktion f differentiaalikehitelmän nojalla

$$\begin{aligned}&f(x(t+h),y(t+h))-f((x(t),y(t))\\&=a(x(t+h)-x(t))+b(y(t+h)-y(t))+\|(u,v)\|\varrho(u,v),\end{aligned}$$

missä ϱ on funktio, jolle $\varrho(u,v)\to 0$, kun $\|(u,v)\|\to 0$.

Kun $h\to 0$, on $u=x(t+h)-x(t)\to 0$ ja $v=y(t+h)-y(t)\to 0$, joten

$$\begin{aligned}&\frac{f(x(t+h),y(t+h))-f((x(t),y(t))}{h}\\&=a\,\frac{x(t+h)-x(t)}{h}+b\,\frac{y(t+h)-y(t)}{h}+\|(\frac{u}{h},\frac{v}{h})\|\varrho(u,v),\\&\to a\,x'(t)+b\,y'(t),\quad \text{kun } h\to 0.\end{aligned}$$

Tämä on mitä väitettiin. □

SEURAUS 3.13. *Olkoot $f=f(x,y)$, $x=x(u,v)$ ja $y=y(u,v)$ jatkuvasti derivoituvia. Tällöin yhdistetty funktio $(u,v)\mapsto f(x(u,v),y(u,v))$ on jatkuvasti derivoituva ja*

$$\frac{\partial}{\partial u}f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},\qquad \frac{\partial}{\partial v}f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Huomautus 3.14. Jos $g = g(t)$ on derivoituva yhden muuttujan funktio ja $f = f(x, y)$ on differentioituva kahden muuttujan funktio, niin yhdistetty funktio $(x, y) \mapsto g(f(x, y))$ on differentioituva ja sen osittaisderivaatat ovat

$$\frac{\partial}{\partial x} g(f(x, y)) = \frac{dg}{dt} \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} g(f(x, y)) = \frac{dg}{dt} \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Esimerkki 3.15. Olkoon $f = f(x, y)$ funktio, joka riippuu vain pisteen (x, y) etäisyydestä origoon $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Tällöin f on muotoa

$$f(x, y) = g(r(x, y)),$$

jollekin kahden muuttujan funktiolle g, missä $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Edellisen huomautuksen nojalla

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{dg}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{dg}{dr} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{dg}{dr} \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{dg}{dr} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Esimerkki 3.16. Olkoon f differentioituva kahden muuttujan funktio. Funktion f esittäminen napakoordinaateissa tarkoittaa seuraavaa: Asetetaan $x(r, \theta) = r \cos \theta$ ja $y(r, \theta) = r \sin \theta$. Tällöin

$$g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

on f:n napakoordinaatiesitys.

Ketjusäännön nojalla

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta,$$

ja

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial f}{\partial x} r \sin \theta + \frac{\partial f}{\partial y} r \cos \theta.$$

Esimerkki 3.17. Olkoon f differentitoituva kahden muuttujan funktio. Oletetaan, että on olemassa luku m siten, että

$$f(ta, tb) = t^m f(a, b)$$

kaikille luvuille t, a ja b.

Derivoidaan tämä identiteetti t:n suhteen käyttäen ketjusääntöä. Yhtälön vasemman puolen derivaataksi saadaan

$$\frac{\partial f}{\partial x}(ta, tb) \frac{d(ta)}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(ta, tb) \frac{d(tb)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(ta, tb)\, a + \frac{\partial f}{\partial y}(ta, tb)\, b.$$

Yhtälön oikean puolen derivaataksi saadaan

$$mt^{m-1} f(a, b).$$

Koska nämä derivaatat ovat samat kaikille t:n arvoille, saadaan sijoittamalla $t = 1$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\, a + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\, b = m\, f(a, b).$$

Tämä *Eulerin yhtälönä* tunnettu yhtälö voidaan kirjoittaa myös

$$\frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} x = m\, f(x, y).$$

4. Ääriarvot

MÄÄRITELMÄ 4.1. Olkoot $D \subset \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in D$ ja $f\colon D \to \mathbb{R}$ annettu funktio. Sanotaan, että piste (x_0, y_0) on funktion f *lokaali maksimipiste*, jos $f(x,y) \leq f(x_0, y_0)$ kaikille pisteille $(x,y) \in D$, jotka ovat riittävän lähellä pistettä (x_0, y_0).

Vastaavasti, piste (x_0, y_0) on funktion f *lokaali minimipiste*, jos $f(x,y) \geq f(x_0, y_0)$ kaikille pisteille $(x,y) \in D$, jotka ovat riittävän lähellä pistettä (x_0, y_0).

Piste (x_0, y_0) on funktion f *lokaali ääriarvopiste*, jos se on f:n lokaali maksimipiste tai lokaali minimipiste.

Sanotaan myös, että funktiolla f on pisteessä (x_0, y_0) *lokaali ääriarvo*, jos piste (x_0, y_0) on funktion f lokaali ääriarvopiste.

ESIMERKKI 4.2. a) Funktiolla $f(x,y) = x^2 + y^2$ on pisteessä $(0,0)$ arvo $f(0,0) = 0$ ja muualla $f(x,y) = x^2 + y^2 > 0$, joten pisteessä $(0,0)$ funktiolla f on aito lokaali minimi (*aito*: muissa lähipisteissä arvot ovat aidosti suurempia).

b) Vastaavasti, funktiolla $f(x,y) = -x^2 - y^2$ on pisteessä $(0,0)$ aito lokaali maksimi.

c) Funktiolla $f(x,y) = x^2$ on pisteessä $(0,0)$ lokaali minimi $f(0,0) = 0$, mutta origoa lähellä olevissa pisteissä $(0,y)$ funktiolla on sama arvo $f(0,y) = f(0,0) = 0$.

d) Funktiolla $f(x,y) = x^2 - y^2$ on pisteessä $(0,0)$ arvo $f(0,0) = 0$, mutta pisteissä $(x,0)$, $x \neq 0$, on $f(x,0) = x^2 > 0$ ja pisteissä $(0,y)$, $y \neq 0$, on $f(0,y) = -y^2 < 0$, joten origo ei ole f ääriarvopiste. (Pistettä, jonka ympäristössä funktio saa sekä suurempia että pienempiä arvoja, kutsutaan funktion *satulapisteeksi*.)

4.1. Gradientin nollakohta välttämätön ehto.

LAUSE 4.3. *Olkoot $A \subset \mathbb{R}^2$ avoin joukko, $(x_0, y_0) \in A$ ja $f\colon A \to \mathbb{R}$ funktio, jolla pisteessä (x_0, y_0) on osittaisderivaatat $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. Jos piste (x_0, y_0) on funktion f lokaali ääriarvopiste, niin*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Tämä ääriarvokohdalle välttämätön ehto saa selkeän muodon funktion f gradientin avulla ilmaistuna. Funktion f *gradientti* pisteessä (x,y) on vektori

$$\nabla f(x,y) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Big).$$

Jos siis funktiolla f on pisteeessä (x_0, y_0) lokaali ääriarvo, on

$$\nabla f(x_0, y_0) = (0,0).$$

On tärkeää huomata, että gradientin häviäminen on välttämätön ehto ääriarvolle, mutta se ei suinkaan ole riittävä.

ESIMERKKI 4.4. a) Funktiolle $f(x,y) = x^2 + y^2$ on $\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$, joten $\nabla f(x,y) = (0,0)$, jos ja vain jos $(x,y) = (0,0)$.

b) Vastaavasti, funktiolle $f(x,y) = -x^2 - y^2$ on $\nabla f(x,y) = (-2x, -2y)$, joten $\nabla f(x,y) = (0,0)$, jos ja vain jos $(x,y) = (0,0)$.

c) Funktiolle $f(x,y) = x^2$ on $\nabla f(x,y) = (2x, 0)$, joten $\nabla f(x,y) = (0,0)$, jos ja vain jos $x = 0$; y voi olla mikä luku tahansa.

d) Funktiolla $f(x,y) = x^2 - y^2$ on $\nabla f(x,y) = (2x, -2y)$, joten $\nabla f(x,y) = (0,0)$, jos ja vain jos $(x,y) = (0,0)$. Huomaa, että origo ei kuitenkaan ole f:n ääriarvopiste.

On helppo todeta, että jos funktiolla f pisteessä (x_0, y_0) on suuntaisderivaatat $\partial_{(u,v)} f(x_0, y_0)$ kaikkiin suuntiin (u,v), ja jos piste (x_0, y_0) on f:n ääriarvopiste, niin $\partial_{(u,v)} f(x_0, y_0) = 0$ kaikille yksikkövektoreille (u,v).

4.2. Riittävä ehto toisten derivaattojen avulla. Yhden muuttujan funktioille mahdollisen ääriarvon laadun selvittämiseen käytetään toista derivaattaa. Vastaava menetelmä on käytettävissä kahden muuttujan funktioille, mutta tilanne on mutkikkaampi, koska toisia derivaattoja on nyt neljä.

Olkoot $A \subset \mathbb{R}^2$ avoin joukko ja $f\colon A \to \mathbb{R}$ annettu funktio. Oletetaan, että f:llä on osittaiderivaatat $\frac{\partial f}{\partial x}$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}$ kaikkialla A:ssa. Funktion f toisen kertaluvun derivaatat määritellään näiden osittaisderivaattoina edelläen, että ne ovat olemassa:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Myös merkintöjä $D_{1,1}f$, $D_{1,2}f$, $D_{2,1}f$ ja $D_{2,2}f$ käytetään.

Tarkasteltaessa yksinkertaisia esimerkkejä, havaitaan, että ristikkäiset osittaisderivaatat $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ ja $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ ovat samat. Aina näin ei käy, mutta jos toisen kertaluvun osoittaisderivaatat ovat jatkuvat, niin näin on.

Lause 4.5. *Olkoot $A \subset \mathbb{R}^2$ avoin joukko ja $f\colon A \to \mathbb{R}$ annettu funktio. Oletetaan, että f:llä on osittaiderivaatat $\frac{\partial f}{\partial x}$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}$ kaikkialla A:ssa.*

Oletetaan edelleen, että toiset osittaisderivaatat $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ ja $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ ovat olemassa ja jatkuvat. Tällöin

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}.$$

Lause 4.6. *Olkoot $A \subset \mathbb{R}^2$ avoin joukko ja $f\colon A \to \mathbb{R}$ annettu funktio. Oletetaan, että f:n ensimmäisen ja toisen kertaluvun osittaiderivaatat ovat jatkuvia A:ssa.*

Olkoon $(x_0, y_0) \in A$ funktion f gradientin nollakohta, $\nabla f(x_0, y_0) = (0,0)$.

Merkitään

$$a = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \quad b = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_0, y_0), \quad c = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0),$$

ja olkoon

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = ac - b^2.$$

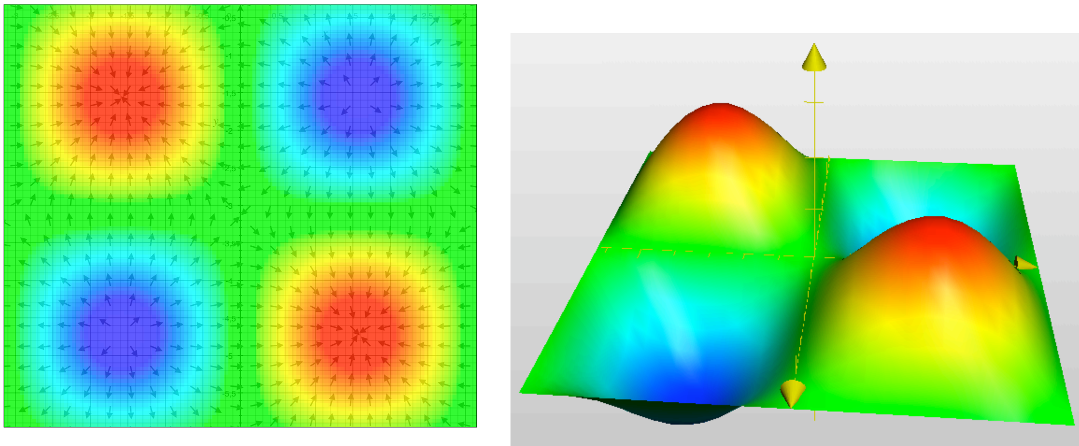
Tällöin:

a) *Jos $\Delta > 0$ ja $a > 0$, niin piste (x_0, y_0) on f:n lokaali minimipiste.*
b) *Jos $\Delta > 0$ ja $a < 0$, niin piste (x_0, y_0) on f:n lokaali maksimipiste.*
c) *Jos $\Delta < 0$, niin piste (x_0, y_0) ei ole f:n ääriarvopiste (satulapiste).*

Esimerkki 4.7. Olkoon $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$. Tällöin

$$\nabla f(x,y) = (6x^2 - 6y, -6x + 6y).$$

Siis $\nabla f(x,y) = (0,0)$, jos ja vain jos $x^2 = y$ ja $x = y$. Tämän yhtälöparin ratkaisut ovat $(x,y) = (0,0)$ ja $(x,y) = (1,1)$.



KUVA 9. Funktion $(x, y) \mapsto \sin x \sin y$ tasa-arvokäyriä sekä gradienttivektoreita sekä funktion kuvaaja.

Lokaalin ääriarvon laatu tarkistetaan toisen kertaluvun osittaisderivaattojen avulla:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 12x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x, y) = -6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6,$$

Pisteessä $(x, y) = (0, 0)$ on $a = 0$, $b = -6$, $c = 6$ ja $\Delta = -b^2 = -36 < 0$. Kyseessä ei siis ole ääriarvopiste, vaan satulapiste.

Pisteessä $(x, y) = (1, 1)$ on $a = 12 > 0$, $b = -6$, $c = 6$ ja $\Delta = ac - b^2 = 36 > 0$. Kyseessä on siis lokaali minimipiste.

Tarkastellaan funktion f käyttäytymistä kiinteän pisteen (x_0, y_0) ympäristössä. Olkoon $\alpha = (x, y)$ derivoituva käyrä, joka kulkee pisteen (x_0, y_0) kautta hetkellä $t = 0$, t.s. $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$. Olkoon käyrän nopeusvektori hetkellä $t = 0$ $\alpha'(0) = (u, v)$. Ketjusäännön nojalla

$$\frac{d}{dt} f(\alpha(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha(t))y'(t) = \nabla f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t).$$

Erityisesti hetkellä $t = 0$ on

$$\frac{d}{dt} f(\alpha(t))\Big|_{t=0} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \alpha'(0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (u, v).$$

Palautetaan mieleen Cauchyn ja Schwarzin epäyhtälö: Vektoreiden (a, b) ja (u, v) sisätulolle on voimassa

$$-\|(a, b)\|\,\|(u, v)\| \le (a, b) \cdot (u, v) \le \|(a, b)\|\,\|(u, v)\|.$$

Lisäksi yhtäsuuruus on voimassa, jos $(u, v) = -(a, b)$ (vasen e.y.) tai $(u, v) = (a, b)$ (oikea e.y.). Kun tätä sovelletaan funktion f gradienttiin, saadaan

$$-\|\nabla f(x_0, y_0)\|\,\|(u, v)\| \le \nabla f(x_0, y_0) \cdot (u, v) \le \|\nabla f(x_0, y_0)\|\,\|(u, v)\|,$$

ja yhtäsuuruus on voimassa, jos $(u, v) = -\nabla f(x_0, y_0)$ (vasen e.y.) tai $(u, v) = \nabla f(x_0, y_0)$ (oikea e.y.).

Koska epäyhtälöissä keskimmäisenä oleva sisätulo on derivaatta $\frac{d}{dt} f(\alpha(t))\big|_{t=0}$, voidaan epäyhtälöparin tulos tulkita seuraavasti:

Funktio kasvaa nopeimmin gradienttinsa suuntaan ja
vähenee nopeimmin gradienttiaan vastakkaiseen suuntaan.

Lisäksi, jos käyrä α valitaan siten, että $f(\alpha(t)) = c =$ vakio, on $\frac{d}{dt}f(\alpha(t)) = 0$ kaikille t, joten erityisesti

$$0 = \frac{d}{dt}f(\alpha(t))\Big|_{t=0} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (u, v).$$

Tämä tarkoittaa, että tasa-arvokäyrien $f(x, y) = c$ tangenttivektorit (u, v) ovat kohtisuorassa gradienttivektoria $\nabla f(x, y)$ vastaan.

Vertaa tätä kuvaan 9. Funktion suurin arvo 1 saavutetaan kuvan vasemman ylänurkan ja oikean alanurkan keskellä. Vastaavasti funktion pienin arvo -1 saavutetaan kuvan oikean ylänurkan ja vasemman alanurkan keskellä. Kuvasta on lisäksi todettavissa, että tasa-arvokäyrät ja gradienttivektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

4.3. Suurin ja pienin arvo suljetussa joukossa (Weierstrassin lause).

LAUSE 4.8. *Olkoot $A \subset \mathbb{R}^2$ suljettu ja rajoitettu joukko sekä $f \colon A \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Tällöin f saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa joukossa A, t.s. on olemassa $x_1 \in A$ ja $x_2 \in A$ siten, että $f(x) \leq f(x_1)$ kaikille $x \in A$ ja $f(x) \geq f(x_2)$ kaikille $x \in A$.*

ESIMERKKI 4.9. Olkoot A kolmio, määrittelevät epäyhtälöt $x \geq 0$, $y \geq 0$ ja $x + y \leq 4$ (piirrä kuva) sekä $f(x, y) = x^2 y\, e^{-(x+y)}$, kun $(x, y) \in A$.

Koska f on jatkuva ja A on suljettu ja rajoitettu, saavuttaa f suurimman ja pienimmän arvonsa joukossa A. Näiden arvojen määräämiseksi paikannetaan lokaalit ääriarvopisteet alueen A sisältä ja tarkastellaan erikseen A:n reuna.

Määrätään aluksi gradientin nollakohdat:

$$\nabla f(x, y) = (xy(2 - x)\, e^{-(x+y)}, x^2(1 - y)\, e^{-(x+y)}).$$

Siis $\nabla f(x, y) = (0, 0)$, jos ja vain jos $x = 0$ ja y on mikä tahansa luku väliltä $0 \leq y \leq 4$ (jotta $(x, y) \in A$), tai jos $(x, y) = (2, 1)$.

Pisteessä $(x, y) = (2, 1)$ on $f(2, 1) = 4\, e^{-3} \approx 0.2$.

Alueen A reuna koostuu kolmesta janasta. Pitkin x- ja y-akselia funktiolla f on arvo nolla.

Janalla $y = 4 - x$, $0 \leq x \leq 4$, on

$$g(x) = f(x, 4 - x) = x^2(4 - x)\, e^{-4}.$$

Funktion g ääriarvojen määräämiseksi lasketaan g:n derivaatta:

$$g'(x) = (8x - 3x^3)\, e^{-4}.$$

Siis $g'(x) = 0$, jos ja vain jos $x = 0$ tai $x = 8/3$. Pisteessä $x = 8/3$ on

$$g(8/3) = f\Big(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\Big) = \frac{256}{27}\, e^{-4} \approx 0.174.$$

Välin $[0, 4]$ päätepisteissä on $g(0) = f(0, 0) = 0$ ja $g(4) = f(4, 0) = 0$.

Siis funktion suurin arvo saavutetaan alueen sisäpisteessä $(2, 1)$ ja pienin arvo nolla kolmion x- ja y-akseleille jäävillä reunan osilla.

4.4. Sidotut ääriarvot ja Lagrangen kertoimet. Edellä käsittellyt ääriarvotehtävät ovat olleet ns. vapaia ääriarvotehtäviä. Näiden rinnalla ovat *sidotut ääriarvotehtävät*, joissa pyritään määräämään annetun funktion $f = f(x, y)$ pienin tai suurin arvo, kun pisteen (x, y) valintaa rajoittaa side-ehto $g(x, y) = c$, missä g on annettu funktio.

Tarkastellaan johdattelevana esimerkkinä seuraavaa ongelmaa: On määrättävä ellipsin $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ origoa lähinnä olevat pisteet.

Asetetaan $g(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ ja $f(x, y) = x^2 + y^2$, jolloin ongelma voidaan esittää muodossa: On määrättävä pisteet (x, y) joille $f(x, y)$ saa pienimmän mahdollisen arvon ehdolla, että $g(x, y) = 1$. Kannattaa huomata, että origon ja pisteen (x, y) välisen etäisyyden $\sqrt{x^2 + y^2}$ minimi saavutetaan täsmälleen silloin, kun sen neliö $x^2 + y^2$ saavuttaa miniminsä.

Tilanteen geometrian perusteella on selvää, että funktion f minimi ehdolla $g(x, y) = 1$ saavutetaan pisteissä $(x, y) = (\pm a, 0)$ tai $(x, y) = (0 \pm b)$ riippuen siitä, onko $a < b$ vai $a > b$ (olettaen, että joka tapauksessa $a \neq b$). Päätellään tämä toisella tavalla, joka on helppo yleistää. Tarkastellaan funktion f tasa-arvokäyriä $f(x, y) = s$, kun s kasvaa arvosta $s = 0$ lähtien. Pienille s:n arvoille nämä origokeskiset, $\sqrt{s}$-säteiset ympyrät eivät leikkaa side-ehdon määräämää ellipsiä. Kun s saavuttaa kriittisen minimiarvon, sivuaa ympyrä $f(x, y) = s$ ellipsiä $g(x, y) = 1$, t.s. ympyrällä ja ellipsillä on sama tangentti, jolloin myös niiden normaalivektorit ovat yhdensuuntaiset. Palautetaan mieleen, että tasa-arvokäyrien $f(x, y) = s$ tangenttivektorit ovat kohtisuorassa gradienttivektoria $\nabla f(x, y)$ vastaan. Siis ympyrän $f(x, y) = s$ normaalivektori $\nabla f(x, y)$ ja ellipsin $g(x, y) = 1$ normaalivektori $\nabla g(x, y)$ ovat yhdensuuntaiset. Vektoreiden yhdensuuntaisuus tarkoittaa, että toinen on toisen lukumonikerta, joten pisteessä (x, y), jossa $f(x, y)$ saa pienimmän arvonsa ehdolla, että $g(x, y) = 1$, on voimassa

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$$

jollekin reaaliluvulle λ.

Tässä esimerkkitilanteessa

$$\nabla f(x, y) = (2x, 2y), \quad \text{ja} \quad \nabla g(x, y) = (2x/a^2, 2y/b^2),$$

joten ehto $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$ on

$$(2x, 2y) = \lambda(2x/a^2, 2y/b^2) = (\lambda 2x/a^2, \lambda 2y/b^2).$$

Siis $x = 0$ tai $\lambda/a^2 = 1$ eli $\lambda = a^2$. Vastaavasti $y = 0$ tai $\lambda = b^2$. Piste $(x, y) = (0, 0)$ ei toteuta side-ehtoa $g(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Kun oletetaan, että $a \neq b$, eivät molemmat ehdot $\lambda = a^2$ ja $\lambda = b^2$ voi toteutua. Siis on joko $x = 0$ ja $\lambda = b^2$ tai $y = 0$ ja $\lambda = a^2$. Tarkastellaan tapausta $y = 0$ ja $\lambda = a^2$. Sijoittamalla $y = 0$ side-ehtoon, saadaan $\frac{x^2}{a^2} = 1$, joten $x = \pm a$, t.s. $(x, y) = (\pm a, 0)$.

Lause 4.10 (Väliarvolause). *Olkoot $A \subset \mathbb{R}^2$ avoin joukko ja $f\colon A \to \mathbb{R}$ differentioituva funktio. Olkoot $p_0 = (x_0, y_0)$ ja $p_1 = (x_1, y_1)$ joukon A pisteitä.*

Oletetaan, että pisteitä p_0 ja p_1 yhdistävä jana J sisältyy joukkoon A, t.s. $(1 - t)p_0 + tp_1 \in A$ kaikille $t \in [0, 1]$.

Tällöin janalta J löytyy piste p siten, että

$$f(p_1) - f(p_0) = \nabla f(p) \cdot (p_1 - p_0).$$

Todistus. Asetetaan $g(t) = f((1-t)p_0 + tp_1)$, kun $t \in [0,1]$. Tällöin g on derivoituva yhden muuttujan funktio, jolle $g(1) = f(p_1)$ ja $g(0) = f(p_0)$. Lisäksi ketjusäännön nojalla $g'(t) = \nabla f((1-t)p_0 + tp_1) \cdot (p_1 - p_0)$.

Yhden muuttujan funktioiden väliarvolauseen nojalla väliltä $[0,1]$ löytyy luku t siten, että $g(1) - g(0) = g'(t)(1-0)$. Väite seuraa tästä. □

Huomautus 4.11. Vastaava väite ei pidä paikkansa vektoriarvoisille funktioille, ei edes yhden muuttujan funktioille. Vastaesimerkkinä tarkastellaan käyrää $\alpha\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ (origokeskinen yksikköympyrä). Tällöin $\alpha(2\pi) = \alpha(0) = (1,0)$, joten $\alpha(2\pi) - \alpha(0) = (0,0)$. Toisaalta, $\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t) \neq (0,0)$ kaikille t, joten $\alpha'(t)\,(2\pi - 0) \neq (0,0)$ kaikille t.

Lause 4.12 (Implisiittifunktiolause). *Olkoot $A \subset \mathbb{R}^2$ avoin joukko ja $f\colon A \to \mathbb{R}$ annettu jatkuvasti derivoituva funktio sekä $c \in \mathbb{R}$ ja $(x_0, y_0) \in A$.*

Oletetaan, että

$$f(x_0, y_0) = c \quad \text{ja} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Tällöin on olemassa avoimet välit I ja J siten, että $(x_0, y_0) \in I \times J$, $I \times J \subset A$, ja että jokaiselle $x \in I$ yhtälöllä

$$f(x,y) = c$$

on yksikäsitteinen ratkaisu $y = y(x) \in J$, jolle $y(x_0) = y_0$.

Ratkaisun määrittelemä funktio $y\colon I \to J$ on derivoituva ja sen derivaatalle on

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x))} \quad \text{kaikille } x \in I.$$

Todistus. Voidaan olettaa, että $c = 0$ (muuten tarkastellaan funktiota $f - c$), ja että $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$ (muuten tarkastellaan funktiota $-f$). Koska f on jatkuvasti derivoituva, on pisteellä (x_0, y_0) suorakaiteen muotoinen ympäristö $U = I' \times J'$, jossa $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) > 0$. Voidaan olettaa, että riittävän pienelle $\delta > 0$ on $I' = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ ja $J' = [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$. Erityisesti $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) > 0$ kaikille $y \in J'$. Tämä tarkoittaa, että funktio $y \mapsto f(x_0, y)$ on aidosti kasvava. Koska $f(x_0, y_0) = c = 0$, on $f(x_0, y) < 0$, kun $y_0 - \delta \le y < y_0$ ja $f(x_0, y) > 0$, kun $y_0 + \delta \ge y > y_0$. Erityisesti $f(x_0, y_0 - \delta) < 0$ ja $f(x_0, y_0 + \delta) > 0$. Koska funktio $x \mapsto f(x, y_0 - \delta)$ on jatkuva ja sen arvo pisteessä $x = x_0$ on negatiivinen, on olemassa $\delta' > 0$ siten, että $\delta' \le \delta$ ja $f(x, y_0 - \delta) < 0$ kaikille $x \in [x_0 - \delta', x_0 + \delta']$. Vastaavan päättelyn avulla nähdään, että on olemassa $\delta'' > 0$ siten, että $\delta'' \le \delta$ ja $f(x, y_0 + \delta) > 0$ kaikille $x \in [x_0 - \delta'', x_0 + \delta'']$. Olkoon δ_1 pienempi luvuista δ' ja δ''. Tällöin

$$f(x, y_0 - \delta) < 0 < f(x, y_0 + \delta) \quad \text{kaikille } x \in [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1].$$

Asetetaan $I = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ ja $J = (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$. Sovelletaan yhden muuttujan funktioiden Bolzanon lausetta funktioihin $y \mapsto f(x,y)$, $x \in I$. Bolzanon lauseen nojalla jokaiselle $x \in I$ yhtälöllä $f(x,y) = c = 0$ on ratkaisu $y \in J$. Koska $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) > 0$ kaikille $y \in J$, on funktio $y \mapsto f(x,y)$ aidosti kasvava, ja ratkaisuja $y = y(x)$ on siis vain yksi.

Osoitetaan lopuksi funktion $y = y(x)$ derivoituvuus. Tässä käytetään apuna väliarvolausetta. Olkoot x, $\tilde{x} \in I$. Väliarvolauseen nojalla lukujen x ja $\tilde{x}$ välissä on luku

ξ ja lukujen $y = y(x)$ ja $\tilde{y} = y(\tilde{x})$ välissä on luku η siten, että

$$f(x,y) - f(\tilde{x},\tilde{y}) = \nabla f(\xi,\eta) \cdot (x-\tilde{x}, y-\tilde{y}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)(x-\tilde{x}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)(y-\tilde{y}).$$

Koska $y = y(x)$ ja $\tilde{y} = y(\tilde{x})$ ovat yhtälön $f(x,y) = 0$ ratkaisuja, saadaan

$$y - \tilde{y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)}{\frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)}\,(x-\tilde{x}).$$

Koska osoittaisderivaatat $\frac{\partial f}{\partial x}$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}$ ovat jatkuvia suljetussa neliössä $I' \times J'$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) > 0$, on osamäärä $\frac{\partial f}{\partial x}/\frac{\partial f}{\partial y}$ rajoitettu funktio. Edellisestä saadaan nyt aluksi, että kun $x - \tilde{x} \to 0$, on $y(x) - \tilde{y}(\tilde{x}) = y - \tilde{y} \to 0$. Tämä tarkoittaa, että ratkaisu $y = y(x)$ on jatkuva.

Edelleen saadaan

$$\frac{y(x) - \tilde{y}(\tilde{x})}{x - \tilde{x}} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)}{\frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)}.$$

Kun $x - \tilde{x} \to 0$, seuraa funktion $y = y(x)$ jatkuvuudesta, että $(\xi,\eta) \to (x, y(x))$, joten

$$\frac{y(x) - \tilde{y}(\tilde{x})}{x - \tilde{x}} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)}{\frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)} \to -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x))}.$$

Siis funktiolla $y = y(x)$ on derivaatta ja se toteuttaa väitetyn yhtälön. □

LAUSE 4.13 (Lagrangen kertoimet). *Olkoot $A \subset \mathbb{R}^2$ avoin joukko ja f, $g\colon A \to \mathbb{R}$ annettuja jatkuvasti derivoituvia funktioita sekä $(x_0, y_0) \in A$.*

Pisteestä (x_0, y_0) oletetaan, että se on käyrällä $g(x,y) = 0$, t.s. $g(x_0,y_0) = 0$.

Funktiosta g oletetaan, että

$$\nabla g(x,y) \neq (0,0) \quad \textit{kaikille pisteille } (x,y), \textit{ joille } g(x,y) = 0.$$

Funktiosta f oletetaan, että f saavuttaa pisteessä (x_0,y_0) ääriarvon side-ehdolla $g(x,y) = 0$.

Tällöin on olemassa luku λ (ns. Lagrangen kerroin*) siten, että*

$$\nabla f(x_0,y_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0).$$

TODISTUS. Oletuksen mukaan $g(x_0,y_0) = 0$ ja

$$\nabla g(x_0,y_0) \neq (0,0).$$

Oletetaan, että $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$. Implisiittifunktiolauseen nojalla yhtälöllä

$$g(x,y) = 0$$

on pisteen (x_0,y_0) lähellä yksikäsitteinen, derivoituva ratkaisu $y = y(x)$. Ratkaisun derivaatalle on

$$y'(x_0) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y(x_0))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y(x_0))}.$$

Yhden muuttujan funktiolla $x \mapsto f(x, y(x))$ on oletuksen nojalla ääriarvo pisteessä $x = x_0$. Pisteessä $x = x_0$ kyseisen funktion derivaatta on tällöin nolla. Ketjusäännön avulla saadaan

$$0 = \frac{d}{dx} f(x, y(x))\Big|_{x=x_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y(x_0)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y(x_0))y'(x_0).$$

Yhdistämällä tähän edellä saatu derivaatan $y'(x_0)$ arvo ja sijoittamalla $y(x_0) = y_0$, saadaan

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)}.$$

Kertomalla puolittain nimittäjällä $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)$, saadaan

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = 0.$$

Tämä tarkoittaa, että vektorit

$$\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Big) \quad \text{ja} \quad \Big(\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0), -\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)\Big).$$

ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Koska vektori $\big(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)\big)$ on kohtisuorassa vektoria $\big(\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0), -\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)\big)$ vastaan, ovat siis vektorit

$$\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Big) \quad \text{ja} \quad \Big(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)\Big)$$

yhdensuuntaiset. Tämä tarkoittaa, että toinen on toisen monikerta, eli että on olemassa reaaliluku λ siten, että

$$\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Big) = \lambda\Big(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)\Big).$$

□

Huomautus 4.14. a) Kun Lagrangen kertoimien menetelmää käytetään sidottujen ääriarvojen määräämiseen, ei yhtälöä $g(x, y) = 0$ yleensä kannata ratkaista, vaan mahdollinen ääriarvopiste (x_0, y_0) määrätään *eliminoimalla* tuntemattomia kolmen tuntemattoman ja kolmen yhtälön ryhmästä

$$g(x_0, y_0) = 0 \quad \text{ja} \quad \nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0).$$

b) Lagrangen kertoimien lause *ei takaa* ääriarvon olemassaoloa; sellaisen olemassaolo on lauseen oletuksena.

c) Kun määritellään kolmen muuttujan funktio

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

ja sille gradientti

$$\nabla F = \Big(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial \lambda}\Big),$$

on yhtälöryhmä

$$g(x, y) = 0 \quad \text{ja} \quad \nabla f = \lambda \nabla g$$

yhtäpitävä seuraavan vektoriyhtälön kanssa:

$$\nabla F = (0, 0, 0).$$

Esimerkki 4.15. Määrätään yhtälön

$$x^2 + 4xy + y^2 = 4$$

määräämän tasokäyrän etäisyys origosta.

Tätä varten olkoot $f(x, y) = x^2+y^2$ (etäisyyden neliö) ja $g(x, y) = x^2+4xy+y^2-4$. Lagrangen kertoimien lauseen nojalla mahdollinen ääriarvopiste löydetään yhtälön $g(x, y) = 0$ ja yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 2x = \lambda(2x + 4y) \\ 2y = \lambda(4x + 2y) \end{cases}$$

avulla.

Piste $(x, y) = (0, 0)$ ei toteuta yhtälöä $g(x, y) = 0$, joten yhtälöryhmässä ei voi olla $\lambda = 0$. Kirjoittamalla yhtälöryhmä muotoon

$$\begin{cases} x + 2y = \lambda^{-1}x \\ 2x + y = \lambda^{-1}y \end{cases}$$

nähdään, että vektorin (x, y) tulee olla matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ominaisvektori vastaten ominaisarvoa $\mu = \lambda^{-1}$. Ominaisarvot löydetään ratkaisemalla yhtälö (missä $\mathbb{I}$ on yksikkömatriisi)

$$\det(\mu\mathbb{I} - A) = \det \begin{bmatrix} \mu - 1 & -2 \\ -2 & \mu - 1 \end{bmatrix} = (\mu - 1)^2 - 4 = 0.$$

Ratkaisuiksi saadaan $\mu_1 = -1$ ja $\mu_2 = 3$. Vastaavat arvot $\lambda_1 = \mu_1^{-1} = -1$ ja $\lambda_2 = \mu_2^{-1} = 1/3$. Ominaisvektorit löydetään sijoittamalla yhtälöön

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ominaisarvot $\mu = \mu_1$ ja $\mu = \mu_2$ sekä ratkaisemalla k.o. yhtälöryhmmät. Erääksi ominaisvektoripariksi saadaan $(x_1, y_1) = (-1, 1)$ ja $(x_2, y_2) = (1, 1)$.

Kerrotaan alkuperäisen yhtälöryhmän ensimmäinen yhtälö x:llä ja jälkimmäinen yhtälö y:llä ja lasketaan yhtälöt puolittain yhteen. Saadaan

$$2x^2 + 2y^2 = \lambda(2x + 4y)x + \lambda(4x + 2y)y = 2\lambda(x^2 + 4xy + y^2).$$

Ehdon $g(x, y) = 0$ perusteella on $x^2 + 4xy + y^2 = 4$, joten saadaan

$$2x^2 + 2y^2 = 2\lambda \cdot 4 = 8\lambda.$$

Siis

$$f(x, y) = x^2 + y^2 = 4\lambda.$$

Löydetyistä ratkaisuista siis vain $\lambda_2 = 1/3$ kelpaa. Haetuksi etäisyydeksi saadaan

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4\lambda_2} = \sqrt{4/3}.$$