Alkeisfunktioiden sarjakehitelmiä

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} + R_n(x), \quad R_n(x) = \frac{x^n}{1-x}.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + R_{2m+1}(x), \quad |R_n(x)| \le \frac{|x|^n}{n!}.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + R_{2m+2}(x), \quad |R_n(x)| \le \frac{|x|^n}{n!}.$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} + R_m(x), \quad R_m(x) = e^c\,\frac{x^m}{m!},$$

jollekin luvulle c lukujen x ja 0 välissä.

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x),$$

$$|R_{n+1}(x)| \le \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad \text{jos } x > 0, \quad |R_{n+1}(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(x+1)}, \quad \text{jos } x < 0.$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + R_{2n+1}(x), \quad |R_{2n+1}(x)| \le \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}.$$

$$(1+x)^s = 1 + sx + \binom{s}{2}x^2 + \binom{s}{3}x^3 + \cdots + \binom{s}{n}x^n + R_{n+1}(x),$$

$$R_{n+1}(x) = \binom{s}{n+1}(1+c)^{s-n}\,x^{n+1}, \quad \text{jollekin luvulle } c \text{ lukujen } x \text{ ja } 0 \text{ välissä.}$$

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1/2}{k}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3\,x^5}{40} + \frac{5\,x^7}{112} + \frac{35\,x^9}{1152} + \frac{63\,x^{11}}{2816} + \cdots$$

Lause 4.5. *Olkoot $A \subset \mathbb{R}^2$ avoin joukko ja $f\colon A \to \mathbb{R}$ annettu funktio. Oletetaan, että f:n ensimmäisen ja toisen kertaluvun osittaiderivaatat ovat jatkuvia A:ssa.*

Olkoon $(x_0, y_0) \in A$ funktion f gradientin nollakohta, $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Merkitään

$$a = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \quad b = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_0, y_0), \quad c = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0),$$

ja olkoon

$$\Delta = \det\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = ac - b^2.$$

Tällöin:

a) *Jos $\Delta > 0$ ja $a > 0$, niin piste (x_0, y_0) on f:n lokaali minimipiste.*
b) *Jos $\Delta > 0$ ja $a < 0$, niin piste (x_0, y_0) on f:n lokaali maksimipiste.*
c) *Jos $\Delta < 0$, niin piste (x_0, y_0) ei ole f:n ääriarvopiste (satulapiste).*