

**Approbatur 2B MATP163**
Loppukoe 9.5.2007

1. Osoita, että sarja

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots$$

suppenee. Osaatko määrätä sarjan summan?

2. Näytä, että logaritmin potenssisarja

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

suppenee itseisesti kaikilla $|x| < 1$. Miksi sarja suppenee myös, kun $x = 1$?

3. Kosinifunktiolla $\cos x$ on kaikilla x suppeneva potenssisarja

$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

Määrää pienin m siten, että

$$\left| \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} - \cos x \right| < 10^{-5}$$

kaikilla $|x| < 1/10$.

4. Kardioidin yhtälö napakoordinaateissa on

$$r = r(\varphi) = a(1 + \cos \varphi), \quad a > 0.$$

Määrää kardioidin rajoittaman alueen pinta-ala. (Piirrä summittainen kuvio.)

5. Määrää kahden muuttujan funktion

$$f(x, y) = xy(3 - x - y)$$

lokaalit ääriarvopisteet tasossa \mathbb{R}^2 . (Funktio $f(x, y)$ vaihtaa merkkiä tiettyjen suorien kohdalla. Voit aluksi selvittää kuvion avulla, missä tason osissa funktio saa positiivisia tai vastaavasti negatiivisia arvoja.)

Laskimen käyttö on sallittu tässä tentissä.