MATRIISILASKENTA

Matriisilaskentaa käytetään lähes kaikilla aloilla. Se tarjoaa matemaattisen koneiston monesta muuttujasta riippuvan ilmiön tarkasteluun. (erityisesti lineaariset riippuvuudet)

Peruskäsitteitä

Matriisi on reaalilukukaavio, joka koostuu riveistä ja sarakkeista

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ alkiot } a_{ij} \in \mathbb{R}$$

missä $i = 1, 2, 3\ldots$ ja $j = 1, 2, 3\ldots$

kyseissä matriisissa on m riviä ja n saraketta. Kyseistä matriisia kutsutaankin $m \times n$-matriisiksi. Tulo $m \times n$ kertoo matriisin dimension, kertaluvun sekä tyypin.

1. **neliömatriisi** $m = n$
   $n \times n$ matriisi

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{bmatrix}$$

2. **rivimatriisi** $m = 1$
   $1 \times n$ matriisi

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \end{bmatrix} \text{ (vaakavektori)}$$

3. **sarakematriisi** $m = n$
   $m \times 1$ matriisi

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ . \\ . \\ . \\ a_{n1} \end{bmatrix} \text{ (pystyvektori)}$$

4. **diagonaalimatriisi**
   (neliömatriisi)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & a_{22} & . & . & . & 0 \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ 0 & 0 & . & . & . & a_{nn} \end{bmatrix} a_{ij} = 0 \text{ aina, kun } i \neq j$$

5. **yksikkömatriisi**
   (neliömatriisi)

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{bmatrix}$$

   päälävistäjät ykkösiä, muut alkiot nollia

6. **nollamatriisi**
   kaikki alkiot nollia

Matriisien yhtäsuuruus

$A = B$, jos A:n ja B:n tyyppi sama ja vastinalkiot yhtäsuuret

Matriisien laskutoimitukset

1. **yhteen- ja vähennyslasku**

   • määritelty vain saman tyyppisille matriiseille
   • vastinalkiot lasketaan yhteen/vähennetään toistaan

2. **skalaarilla kertominen**
   ts. kertominen reaaliluvulla

   • matriisin kaikki alkiot kerrotaan kyseisellä luvulla

   1. ja 2. $\Longrightarrow$
   ominaisuuksia:
   $\circledast A + B = B + A$
   $\circledast A + B + C = (A + B) + C = A + (B + C)$
   $\circledast 0 \times A = 0$, reaaliluvulla 0 kerrotaan matriisi A tulos on nollamatriisi
   $\circledast 1 \times A = A$, reaaliluvulla 1 kerrotaan matriisi A
   $\circledast r(A + B) = rA + rB$, kaikille $r \in \mathbb{R}$

3. **matriisitulo**
   • Kahden matriisin A ja B tulo on määritelty vain, kun A:ssa on yhtämonta saraketta kuin B:ssä on rivejä.

Kun $AB = C$ ja dimensiot $dimA = m \times p$ ja $dimB = p \times n$, niin dimensio $dimC = m \times n$.

• Termi C_{ij} lasketaan siten, että matriisin A i:nnen rivin alkiot kerrotaan termeittäin matriisin B j:nnen sarakkeen alkioilla ja saadut tulot lasketaan yhteen

Matriisitulon ominaisuuksia:
⋇$(AB)C = A(BC)$
⋇$(A + B)C = AC + BC$ ja $A(B + C) = AB + AC$
⋇$r(AB) = (rA)B = A(rB)$, kaikille $r \in \mathbb{R}$
⋇$AI = IA = A$ (I yksikkömatriisi)

Huom!!! Yleensä $AB \neq BA$
ja voi olla $AB = 0$ vaikka $A \neq 0$ ja $B \neq 0$

Matriisin transpoosi

• Matriisin A transpoosi A^T saadaan muuttamalla A:n rivit sarakkeiksi ja sarakkeet riveiksi. (Joissain kirjoissa transpoosia saatetaan merkitä A^t)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix} \quad m \times n\text{-matriisi}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & . & . & . & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & . & . & . & a_{m2} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ a_{1n} & a_{2n} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix} \quad n \times m\text{-matriisi}$$

ominaisuuksia:
⋇$(A^T)^T = A$
⋇$(A + B)^T = A^T + B^T$ ja $A(B + C) = AB + AC$
⋇$(rA)^T = rA^T$, kaikille $r \in \mathbb{R}$
⋇$(AB)^T = A^T B^T$

Determinantti

Determinantti on **neliömatriisiin** A liittyvä reaaliluku, jota merkitään $|A|$ tai $det(A)$

Determinanttia tarvitaan esimerkiksi käänteismatriisia laskettaessa sekä yksikäsitteisen ratkaisun omaavan lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisemisessa.

Determinantin laskeminen:

1. **Kaksirivinen determinantti**

   Lasketaan determinantti matriisille

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

2. **yleisesti $n \times n$-matriisin determinantti:**

   - Yleisesti $n \times n$-matriisin determinantin laskemisessa tarvitaan **alimatriisia** A_{ij}. Alimatriisi A_{ij} on matriisin A osamatriisi, joka on saatu poistamalla matriisista A i:s rivi ja j:s sarake.
   Esim.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \mathbf{a_{21}} & a_{22} & \mathbf{a_{23}} \\ \mathbf{a_{31}} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} \end{bmatrix} A_{\mathbf{12}} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$$

   - Matriisin determinantti voidaan laskea alimatriisien determinanttien (alideterminanttien) avulla.
   - Alideterminantti voidaan taas laskea uusien alideterminanttien avulla, kunnes lopuksi saadaan 2×2-alideterminantti, joka osataan laskea.
   -Determinanttia laskettaessa voidaan kulkea mitä tahansa pysty- tai vaakariviä pitki.
   -Merkki määräytyy laskusta $(-1)^{i+j}$.

$$det(A) = a_{11}\,|A_{11}| - a_{12}\,|A_{12}| + a_{13}\,|A_{13}| - \ldots (-1)^{1+n} a_{1n}\,|A_{1n}|$$

   Huom! Merkin määräytymisen voi muistaa myös helposti

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & . & . \\ - & + & - & + & . & . \\ + & - & + & & & . \\ - & + & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & . & & & \end{vmatrix}$$

Erikoistapaus 3×3-matriisien determinantin voi laskea myös *Sarrus'n* säännön avulla (kirjassa s.44)

Determinantin ominaisuuksia:
$\divideontimes det(A) = det(A^T)$
$\divideontimes det(AB) = det(A)det(B)$
$\divideontimes$ Jos matriisissa A on rivi/sarake, jossa on vain nollia on $det(A) = 0$
$\divideontimes$ Jos matriisissa 2 riviä tai saraketta vaihdetaan keskenään, determinantti muuttuu vastaluvukseen
$\divideontimes$ Jos matriisissa A on 2 samaa riviä tai saraketta on $det(A) = 0$
$\divideontimes$ Jos matriisin A rivi tai sarake kerrotaan luvulla r, determinantti on $r \cdot det(A)$
$\divideontimes$ Jos matriisin A riviin tai sarakkeeseen lisätään toinen rivi tai sarake kerrottuna luvulla $r \in \mathbb{R}$, $det(A)$ **ei muutu!**