Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaiseminen matriisilaskennan keinoin

Tarkastellaan yhtälöryhmää, missä on n kpl tuntemattomia muuttujia $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ja yhteensä m kpl yhtälöitä:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Yhtälöryhmän voi ratkaista kolmella eri matriisilaskennan menetelmällä, jotka käsittelemme seuraavassa:

1. Gaus-Jordanin eliminointimenetelmä.

Seuraavat operaatiot ovat sallittuja yhtälöryhmän ratkaisemisessa (vrt. yhtälöparin ratkaiseminen)

1. Lineaarisen yhtälöryhmän kaksi yhtälöä voidaan vaihtaa keskenään.
2. Yhtälö voidaan kertoa puolittain reaaliluvulla $r \neq 0$.
3. Lineaarisen yhtälöryhmän yhtälöön voidaan lisätä toisen yhtälön moninkerta (vrt. yhtälöparin yhteenlaskukeino).

Ajatellaan yhtälöryhmää matriisi muodossa:

$$AX = B \text{ ts.} \begin{bmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1n} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ a_{m1} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$$

Ja laaditaan ns. laajennettu kerroinmatriisi

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} & b_2 \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

(jokanen rivi kuvaa erikseen kutakin yhtälöryhmän yhtälöä)

1.1. ***Sovitaan edellä esitetyille operaatioille merkinnät:***

1. $R_i \longleftrightarrow R_j$ vaihdetaan i:s ja j:s rivi keskenään.
2. $R_i \longrightarrow rR_i$ kerrotaan i:s rivi luvulla $r \in \mathbb{R}, r \neq 0$.
3. $R_i \longrightarrow R_i + rR_j$ kerrotaan j:s rivi luvulla $r \in \mathbb{R}, r \neq 0$ ja lisätään riviin i.

1.2. ***Idea:*** Gaus-Jordanin eliminointimenetelmän idea on soveltaa operaatioita 1.-3. kunnes laajennetussa kerroinmatriisissa päästään muotoon:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & . & . & . & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 & c_2 \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 & c_n \end{array}\right]$$

$$\text{Josta saadaan yhtälöryhmän ratkaisut:} \quad \begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n = c_n \end{cases}$$

1.3. ***Esimerkkejä.*** Ratkaise yhtälöryhmät:

$$\text{a)} \begin{cases} x + 3y - 2z = 11 \\ -x + 4y + 2z = 24 \\ 6x - y + 6z = -20 \end{cases} \text{b)} \begin{cases} 3x - y + 8z = -1 \\ x + y - 6z = 4 \\ 16x - 2y + 2z = 15 \end{cases} \text{c)} \begin{cases} -3x - 2y + z = -5 \\ 18x - 6z = 6 \\ 6x - y - 2z = 0 \end{cases}$$

HUOM1! Jos Gaus-Jordanin eliminointimenetelmä johtaa yhtälöön $0 = 0$, lineaarisella yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua (vrt. esimerkin kohta c))

HUOM2! Jos Gaus-Jordanin eliminointimenetelmä johtaa yhtälöön $0 = a$, missä $a \neq 0$ lineaarisella yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

2. Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaiseminen käänteismatriisin avulla.

2.1. ***Käänteismatriisi.*** Jos luku $a \in \mathbb{R}$, sen käänteisluvulla $\frac{1}{a} = a^{-1}$ on ominaisuus $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$. Vastaavasti

Olkoon A $n \times n$ neliömatriisi. Jos on olemassa $n \times n$ matriisi B siten, että
$$AB = BA = I$$
niin matriisi A on kääntyvä eli säännöllinen ja B on A:n käänteismatriisi, jota merkitään
$$B = A^{-1}$$

Milloin matriisi on kääntyvä? Koska determinantti $det(AB) = det(A)det(B)$ niin
$det(AA^{-1}) = det(A)det(A^{-1}) = det(I) = 1$, joten
$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$, missä $det(A) \neq 0$
voidaan osoittaa, että

Neliömatriisi A on kääntyvä jos ja vain jos $det(A) \neq 0$

Käänteismatriisin ominaisuuksia:
$\circledast (A^{-1})^{-1} = A$
$\circledast (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T)$
$\circledast (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Käänteismatriisin määrittäminen:
Ensin tarkistetaan onko matriisilla A käänteismatriisia eli onko
$det(A) \neq 0$? Jos on niin A^{-1} voidaan määrittää joko

1. Määritelmän avulla ts. ratkaista matriisin A^{-1} alkiot yhtälöstä $AA^{-1} = I$

2. Gaus-Jordanin menetelmällä. Merkitään pystyviivan vasemmalle puolelle matriisi A ja oikealle puolelle yksikkömatriisi I:

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccccc} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & & & & . & . & . & & & & . \\ . & . & & & & . & . & . & & & & . \\ . & . & & & & . & . & . & & & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} & 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{array}\right]$$

ja ratkaistaa tämä G-J menetelmällä siten, että lopputuloksessa on pystyviivan vasemmalla puolella yksikkömatriisi ja oikealla puolella etsitty matriisi A^{-1}:

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & . & . & . & 0 & b_{11} & b_{12} & . & . & . & b_{1n} \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 & b_{21} & b_{22} & . & . & . & b_{2n} \\ . & . & & & & . & . & . & & & & . \\ . & . & & & & . & . & . & & & & . \\ . & . & & & & . & . & . & & & & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 & b_{m1} & b_{m2} & . & . & . & b_{mn} \end{array}\right]$$

tutustutaan näihin menetelmiin esimerkkien avulla.

2.2. ***Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaiseminen käänteismatriisin avulla:***
Jos

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1n} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ a_{m1} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \text{ ja } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix},$$

niin lineaarinen yhtälöryhmä voidaan esittää matriisimuodossa

$$AX = B$$

Jos A on kääntyvä eli $det(A) \neq 0$, matriisiyhtälön ratkaisu on $X = A^{-1}B$, sillä

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow IX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

3. Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaiseminen Cramerin säännön avulla.

Tämä menetelmä sopii n yhtälön ja n tuntemattoman yhtälöryhmälle, jolla on yksikäsitteinen ratkaisu eli jonka kerroinmatriisin $det(A) \neq 0$.
Tällöin yhtälöryhmän

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

ratkaisu on

$$x_j = \frac{det(A_j)}{det(A)}, \text{ kun } j = 1, 2, \ldots n$$

Missä matriisi A_j on muuten sama kuin matriisi A, mutta sen j:nnes sarake onkin korvattu matriisilla B.Esimerkiksi

$$\text{Kun}A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ ja } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \text{ niin } A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{bmatrix}$$

esimerkki. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 3x - y + 8z = -1 \\ x + y - 6z = 4 \\ 16x - 2y + 2z = 15 \end{cases}$$