Matematiikan peruskurssi (MATY020)
Harjoitus 1 to 22.1.2009 **Ratkaisut**

1. Jos aritmeettisen lukujonon ensimmäinen termi on 13 ja kymmenes termi on 49, niin mikä on jonon kahden peräkkäisen termin erotus?

Ratkaisu. Peräkkäisten termien erotus d ratkeaa yhtälöstä

$$49 = 13 + (10-1)\,d\,.$$

Koska siis $9d = 49 - 13 = 36$, niin $d = \frac{36}{9} = 4$.

Vastaus: Peräkkäisten termien erotus on 4 (ts. jono alkaa $13, 17, 21, \ldots$)

2. Esitä lukujonon

$$1, \frac{5}{6}, \frac{7}{9}, \frac{9}{12}, \frac{11}{15}, \ldots$$

kahdeskymmenesviides termi desimaalilukuna. [*Vastaus: 0,68*]

Ratkaisu. Muutetaan jonon ensimmäinen termi 1 muotoon $\frac{3}{3}$. Nyt jonon termien osoittajat muodostavat aritmeettisen jonon (a_k), jonka 1. termi on 3 ja peräkkäisten termien erotus 2. Siten 25. osoittaja on

$$a_{25} = 3 + (25-1)\cdot 2 = 51.$$

Vastaavasti nimittäjät muodostavat aritmeettisen jonon (b_k), jonka 1. termi on 3 ja peräkkäisten termien erotus 3. Siten 25. nimittäjä on

$$b_{25} = 3 + (25-1)\cdot 3 = 75.$$

Tarkasteltavan lukujonon 25. termi on siis $\dfrac{51}{75} = 0{,}68$.

3. Tunnista, ovatko seuraavat summat aritmeettisia tai geometrisia (ja perustele vastauksesi). Lisäksi laske kyseinen summa, jos se on aritmeettinen tai geometrinen.

$$\text{(a)}\ \sum_{i=1}^{8} \frac{3i-1}{4} \qquad \text{(b)}\ \sum_{j=1}^{11} j(1+j) \qquad \text{(c)}\ \sum_{k=1}^{4} (-1)^k \frac{3^k}{2}$$

Ratkaisu. (a) Summassa

$$\sum_{i=1}^{8} \frac{3i-1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{5}{4} + \frac{8}{4} + \cdots + \frac{20}{4} + \frac{23}{4}$$

kahden peräkkäisen termin erotus on aina $3/4$, joten kyseessä on aritmeettinen summa. Summasssa on 8 termiä, joista ensimmäinen on $2/4$ ja viimeinen $23/4$, joten

$$\sum_{i=1}^{8} \frac{3i-1}{4} = 8 \cdot \frac{2/4 + 23/4}{2} = 25.$$

(b) Summassa

$$\sum_{j=1}^{11} j(1+j) = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + 11\cdot 12$$

esim. 2. termi - 1. termi = 4 mutta 3. termi - 2. termi = $6 \neq 4$, joten peräkkäisten termien erotus ei pysy vakiona. Vastaavasti (2. termi)/(1. termi) = 3 mutta (3. termi)/(2. termi) = 2, joten peräkkäisten termien suhdekaan ei ole vakio. Tämä summa ei siis ole aritmeettinen eikä geometrinen.

(c) Summan

$$\sum_{k=1}^{4}(-1)^k\frac{3^k}{2} = -\frac{3}{2}+\frac{9}{2}-\frac{27}{2}+\frac{81}{2}$$

peräkkäisten termien suhde on aina -3, joten kyseessä on geometrinen summa. Geometrisen summan laskukaavaa käyttäen (4 termiä, 1. termi = $-3/2$ ja suhdeluku $q=-3$)

$$\sum_{k=1}^{4}(-1)^k\frac{3^k}{2} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1-(-3)^4}{1-(-3)} = -\frac{3}{8}(1-81) = 30.$$

4. Geometrisen jonon (a_k) kolmas termi on $a_3 = 256$ ja sen kahdestoista termi on $a_{12} = \frac{1}{2}$.

(a) Ratkaise jonon suhdeluku q ja muodosta kaava, jolla saadaan jonon kaikki termit a_k.

(b) Laske summa $\sum_{k=1}^{10} a_k$. [*Vastaus: 2046*]

Ratkaisu. (a) Annetuista tiedoista saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} a_1q^2 = a_3 = 256 \\ a_1q^{11} = a_{12} = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ylemmän yhtälön mukaan $a_1 = \frac{256}{q^2}$. Kun tämä sijoitetaan alempaan yhtälöön, saadaan

$$\frac{256}{q^2}\cdot q^{11} = \tfrac{1}{2} \Leftrightarrow q^9 = \tfrac{1}{512} \Leftrightarrow q = \sqrt[9]{\tfrac{1}{512}} = \tfrac{1}{2}\,.$$

Siis suhdeluku on $q = \frac{1}{2}$ ja ensimäinen termi $a_1 = \frac{256}{q^2} = 256\cdot 4 = 1024 = 2^{10}$, joten jonon k:s termi saadaan kaavalla

$$a_k = 1024\cdot(\tfrac{1}{2})^{k-1} = 2^{10}\cdot 2^{-k+1} = 2^{11-k}\,.$$

(b) Tässä geometrisessa summassa on 10 termiä ja $q^{10} = 1/(2^{10}) = 1/1024$, joten

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = a_1\cdot\frac{1-q^{10}}{1-q} = \frac{1024\cdot(1-1/1024)}{\frac{1}{2}} = 2\cdot(1024-1) = 2046\,.$$

5. Tilin A korkokanta on 5,7 %/vuosi ja tilin B korkokanta on 5,6 %/vuosi. Tilillä A korko lisätään pääomaan vuosittain, tilillä B neljännesvuosittain. Kumpi tili on tallettajan kannalta parempi valinta?

Ratkaisu. Tilillä A pääoma kasvaa vuodessa 1,057-kertaiseksi. Tilillä B (jonka korkokanta on $\frac{5{,}6}{4}$ %/neljännesvuosi = 1,4 %/neljännesvuosi) pääoma kasvaa neljännesvuodessa 1,014-kertaiseksi ja vuodessa $1,014^4$-kertaiseksi. Koska

$$1{,}014^4 \approx 1{,}05719 > 1{,}0157$$

niin tili B on parempi valinta (antaa hieman suuremman vuosituoton kuin tili A).

(Tehtävän tilanteessa tilin B *nimellinen vuosikorko* on 5,6 % ja ns. *efektiivinen vuosikorko* on puolestaan 5,719 %.)

6. Tilin veroton korkokanta on 3,5 %/vuosi ja korko lisätään pääomaan vuosittain. Kuinka suuri kertatalletus (yhden euron tarkkuudella) kasvaa tällä tilillä seitsemässä vuodessa 5000 euroksi? [*Vastaus: 3930 euroa*]

Ratkaisu. Alkupääoma K_0 kasvaa seitsemässä vuodessa korkoineen pääomaksi $(1+3{,}5/100)^7 \cdot K_0 = (1{,}035)^7 \cdot K_0$. Jotta tämä olisi 5000 euroa, alkupääoman tulee olla

$$K_0 = \frac{5000}{(1{,}035)^7}\,€ \approx 3929{,}95\,€$$

eli euron tarkkuudella 3930 €.

7. Maija talletti vuoden 2008 aikana jokaisen kuukauden alussa 100 euroa tilille, jonka korkokanta on 3,5 %/vuosi. Tilin korko liitetään pääomaan vuoden lopussa, jolloin korosta myös peritään 28 %:n suuruinen lähdevero. Kuinka paljon talletukset kasvoivat nettokorkoa vuoden aikana? [*Vastaus: 16,38 euroa*]

Ratkaisu. Ensimmäinen 100 euron talletuserä kasvoi korkoa vuoden, toinen erä 11/12 vuotta jne. Viimeinen erä (joulukuun alussa) kasvoi korkoa 1/12 vuotta. Tilin nettokorkokanta on

$$(1 - 0{,}28) \cdot 3{,}5 = 2{,}52$$

%/vuosi. Nettokorkoa kertyi Maijan tilille vuoden aikana siten yhteensä

$$\left(1 \cdot \tfrac{2{,}52}{100} + \tfrac{11}{12} \cdot \tfrac{2{,}52}{100} + \cdots + \tfrac{1}{12} \cdot \tfrac{2{,}52}{100}\right) \cdot 100 = 2{,}52 \cdot \left(\tfrac{12}{12} + \tfrac{11}{12} + \tfrac{10}{12} + \cdots + \tfrac{1}{12}\right)$$

euroa. Tässä

$$\tfrac{12}{12} + \tfrac{11}{12} + \tfrac{10}{12} + \cdots + \tfrac{1}{12} = 12 \cdot \frac{\frac{12}{12} + \frac{1}{12}}{2} = 6{,}5$$

aritmeettisen summan kaavalla laskettuna, joten Maijan talletuksille kertyi korkoa siis $2{,}52 \cdot 6{,}5$ euroa eli **16,38** euroa.