Matematiikan peruskurssi (MATY020)
Harjoitus 10 to 26.3.2009 $\boxed{\textbf{ratkaisut}}$

1. Määrää funktion

$$f(x,y) = x^3y^2 - (x+1)^2$$

kaikki ensimmäisen ja toisen kertaluvun osittaisderivaatat.

Ratkaisu. Koska $f(x,y) = x^3y^2 - x^2 - 2x - 1$, niin

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= 3x^2y^2 - 2x - 2 \\
f_y(x,y) &= x^3 \cdot 2y = 2x^3y \\
f_{xx}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2 - 2x - 2) = 6xy^2 - 2 \\
f_{xy}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2 - 2x - 2) = 6x^2y \\
f_{yx}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}(2x^3y) = 6x^2y \\
f_{yy}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}(2x^3y) = 2x^3\,.
\end{aligned}$$

Huomaa, että $f_{xy} = f_{yx}$ (riittää siis laskea toinen).

2. Määrää edellisen tehtävän funktion f kriittiset pisteet ja lokaalit ääriarvot. Laske lisäksi arvo $f(1,3)$. Onko tehtävän 1 funktiolla suurinta tai pienintä arvoa?

Ratkaisu. Koska f on jatkuvasti derivoituva, sen ainoat mahdolliset ääriarvokohdat ovat sen kriittiset pisteet eli kohdat (x,y), joissa $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$. Tehtävän 1 nojalla kriittiset pisteet saadaan yhtälöparista

$$\begin{cases} 3x^2y^2 - 2x - 2 = 0 \\ 2x^3y = 0\,. \end{cases}$$

Alempi yhtälö on voimassa täsmälleen silloin, kun $x = 0$ tai $y = 0$. Jos $x = 0$, niin ylempi yhtälö ei ole voimassa (koska sen vasen puoli on tällöin -2). Jos $y = 0$, niin ylempi yhtälö on voimassa, kun $-2x - 2 = 0$ eli $x = -1$. Näin ollen kohta $(-1,0)$ on funktion f ainoa kriittinen piste. Koska

$$D(-1,0) = f_{xx}(-1,0) \cdot f_{yy}(-1,0) - f_{xy}(-1,0)^2 = -2 \cdot (-2) - 0^2 = 4 > 0$$

ja $f_{xx}(-1,0) = -2 < 0$, niin kriittinen piste $(-1,0)$ on lokaali maksimikohta.

Funktiolla f on siis lokaali maksimi

$$f(-1,0) = (-1)^2 \cdot 0^2 - (-1+1)^2 = 0$$

muttei lokaalia minimiä eikä siten myöskään pienintä arvoa. Jos funktiolla f olisi suurin arvo, se olisi välttämättä sen ainoa lokaali maksimi 0. Laskemalla pyydetty arvo

$$f(1,3) = 1^3 \cdot 3^2 - (1+1)^2 = 5$$

havaitaan kuitenkin, että f saa suurempiakin arvoja, joten tällä funktiolla ei ole suurintakaan arvoa.

Vastaus: Kohta $(-1,0)$ on funktion f ainoa kriittinen piste ja lokaali minimi $f(-1,0) = 0$ on funktion f ainoa lokaali ääriarvo. Tällä funktiolla ei ole pienintä eikä suurinta arvoa. Kohdassa $(1,3)$ funktio f saa arvon 5.

3. Selvitä, onko funktiolla

$$f(x, y) = xy - x + y$$

lokaaleja ääriarvoja.

Ratkaisu. Koska f on jatkuvasti derivoituva, se voi saada lokaalin ääriarvon vain kriittisessä pisteessä. Ratkaistaan kriittiset pisteet. Koska $f_x(x, y) = y - 1$ ja $f_y(x, y) = x + 1$, niin

$$f_y(x, y) = f_x(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = 1 \text{ ja } x = -1.$$

Piste $(-1, 1)$ on siis tämän funktion ainoa kriittinen piste. Koska toisen kertaluvun osittaisderivaatat

$$f_{xx}(x, y) = 0\,, \quad f_{yy}(x, y) = 0 \quad \text{ja} \quad f_{xy}(x, y) = 1$$

ovat jatkuvia kohdassa $(-1, 1)$ ja

$$D(-1, 1) = f_{xx}(-1, 1) \cdot f_{yy}(-1, 1) - f_{xy}(-1, 1)^2 = -1 < 0\,,$$

kriittinen piste $(-1, 1)$ on satulapiste. Funktiolla f ei siis ole lokaaleja ääriarvoja.

4. Määritä funktion

$$f(x, y) = x^2 + \frac{y^3}{3} - 2xy - 3y + 10$$

kriittiset pisteet ja lokaalit ääriarvot.

Ratkaisu. Määrätään kriittiset pisteet laskemalla 1. kertaluvun osittaisderivaatat ja asettamalla kumpikin nollaksi.

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2x - 2y \qquad & f_y(x, y) &= y^2 - 2x - 3 \\ 2x - 2y &= 0 & y^2 - 2x - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Vasen yhtälö on voimassa täsmälleen silloin, kun $x = y$, jolloin oikeanpuoleisesta yhtälöstä tulee toisen asteen yhtälö

$$y^2 - 2y - 3 = 0$$

jonka ratkaisu on

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = 1 \pm 2\,.$$

Siis

$$(x, y) \text{ on kriittinen piste} \Leftrightarrow x = y = -1 \text{ tai } x = y = 3$$

eli kriittiset pisteet ovat $(-1, -1)$ ja $(3, 3)$.

Kriittisten pisteiden laadun selvittämiseksi määrätään toisen kertaluvun osittaisderivaatat:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= 2 \\ f_{yy}(x, y) &= 2y \\ f_{xy}(x, y) &= -2 \end{aligned}$$

Koska

$$\begin{aligned} D(-1, -1) &= f_{xx}(-1, -1) \cdot f_{yy}(-1, -1) - f_{xy}(-1, -1)^2 \\ &= 2 \cdot (-2) - (-2)^2 = -8 < 0 \end{aligned}$$

niin kriittinen piste $(-1,-1)$ on satulapiste. Koska

$$
\begin{aligned}
D(3,3) &= f_{xx}(3,3) \cdot f_{yy}(3,3) - f_{xy}(3,3)^2 = 2 \cdot 6 - (-2)^2 \\
&= 8 > 0
\end{aligned}
$$

ja $f_{xx}(3,3) = 2 > 0$, kriittinen piste $(-1,-1)$ on lokaali minimikohta.

Vastaus: Funktion f kriittiset pisteet ovat $(-1,-1)$ ja $(3,3)$ ja sen ainoa ääriarvo on lokaali minimi

$$
f(3,3) = 3^2 + \frac{3^3}{3} - 2 \cdot 3 \cdot 3 - 3 \cdot 3 + 10 = 1\,.
$$

5. Ratkaise vakio a, kun tiedetään, että kohta $(0,1)$ on funktion

$$
f(x,y) = (x^2-1)(ay^2-y)
$$

kriittinen piste. Onko $f(0,1)$ funktion f lokaali ääriarvo?

Ratkaisu. Funktion f osittaisderivaatat ovat

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= 2x\,(ay^2-y)\,, \\
f_y(x,y) &= (2ay-1)\,(x^2-1)\,.
\end{aligned}
$$

Erityisesti $f_x(0,1) = 0$ ja $f_y(0,1) = (2a \cdot 1 - 1) \cdot (0^2 - 1) = 2a - 1$. Koska $(0,1)$ on f:n kriittinen piste, niin myös $f_y(0,1) = 0$ ja siten $a = \frac{1}{2}$.

Selvitetään kriittisen pisteen $(0,1)$ laatu toisen kertaluvun osittaisderivaattojen

$$
\begin{aligned}
f_{xx}(x,y) &= 2\,(ay^2-y) = y^2 - 2y \\
f_{yy}(x,y) &= 2a\,(x^2-1) = x^2 - 1 \\
f_{xy}(x,y) &= 2x\,(2ay-1) = 2x\,(y-1)
\end{aligned}
$$

avulla:

$$
D(0,1) = f_{xx}(0,1) \cdot f_{yy}(0,1) - f_{xy}(0,1)^2 = (-1) \cdot (-1) - 0^2 > 0
$$

ja $f_{xx}(0,1) = -1 < 0$, joten $(0,1)$ on lokaali ääriarvokohta ja $f(0,1)$ on funktion f lokaali maksimi.

Vastaus: $a = \frac{1}{2}$ ja $f(0,1)$ on lokaali ääriarvo.

6. Kaupan tulot R (tuhatta euroa) riippuvat myyjien määrästä x ja kaupan varaston arvosta y (tuhatta euroa) noudattaen funktiota

$$
R(x,y) = 2600 - x^2 + 24x - y^2 + 80y\,.
$$

Laske se myyjien määrä ja varaston arvo, jolla myyntitulot ovat mahdollisimman suuret.

Ratkaisu. $\begin{cases} R_x(x,y) = -2x + 24 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 12 \\ R_y(x,y) = -2y + 80 = 0 \;\Leftrightarrow\; y = 40 \end{cases}$

joten $(12,40)$ on funktion R ainoa mahdollinen ääriarvokohta. Lisäksi

$$R_{xx}(x,y) = -2\,,\ R_{yy}(x,y) = -2 \text{ ja } R_{xy}(x,y) = 0$$

joten $D(12,40) = -2 \cdot (-2) - 0^2 = 4 > 0$ ja $f_{xx}(12,40) = -2 < 0$. Näin ollen $R(12,40)$ on funktion R lokaali minimiarvo. Se on myös f:n globaali minimi, koska $D(x,y) = 4 > 0$ kaikkialla: ks. Lause 9.6.5 luentomateriaalista

http://www.math.jyu.fi/ylemat/Peruskurssi/luentomateriaalia/aariarvot.pdf

Vastaus: 12 myyjää, varaston arvo 40 000 euroa.

7. Määrää funktion

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - xy$$

pienin arvo, kun muuttujia x ja y sitoo ehto $2x + y = 22$.

Ratkaisu. (1) *sijoitusmenetelmällä:*

Ehto $2x + y = 22$ on kirjoitettavissa muotoon $y = 22 - 2x$. Siten riittää tutkia yhden muuttujan funktiota

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x, 22-2x) = x^2 + 2\cdot(22-2x)^2 - x\,(22-2x) \\ &= x^2 + 2\cdot 22^2 - 8\cdot 22\,x + 8\,x^2 - 22\,x + 2\,x^2 \\ &= 11\,x^2 - 18\cdot 11\,x + 88\cdot 11 \\ &= 11\left(x^2 - 18x + 88\right). \end{aligned}$$

Funktion h kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten h saa pienimmän arvonsa derivaattansa ainoassa nollakohdassa. Koska

$$h'(x) = 11\cdot(2x - 18) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 9$$

niin funktion f pienin arvo suoralla $2x + y = 22$ on siis

$$h(9) = 11\cdot(9^2 - 18\cdot 9 + 88) = 11\cdot(-81 + 88) = 77\,.$$

(2) *Lagrangen menetelmällä:* [1]

Kirjoitetaan side-ehto muotoon

$$g(x,y) = 2x + y - 22 = 0$$

ja tutkitaan, milloin Lagrangen funktio

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\,g(x,y) = x^2 + 2y^2 - xy + \lambda\,(2x + y - 22)$$

toteuttaa yhtälöryhmän

$$\begin{cases} F_x(x,y,\lambda) = 2x - y + 2\lambda = 0 & (1) \\ F_y(x,y,\lambda) = 4y - x + \lambda = 0 & (2) \\ F_\lambda(x,y,\lambda) = 2x + y - 22 = 0 & (3) \end{cases}$$

(koska $(g_x(x,y), g_y(x,y)) = (2,1)$ ei ole missään $(0,0)$, sidotun ääriarvon kaikki mahdolliset ratkaisukohdat saadaan ylläolevasta yhtälöryhmästä).

[1] Lagrangen menetelmä ei kuulu tenttialueeseen, mutta sitä saa käyttää tentissä.

Yhtälöistä (1) ja (2) muodostuu ehto

$$2x - y = -2\lambda = 8y - 2x$$

josta saadaan $4x = 9y$ eli $y = \frac{4}{9}x$. Sijoittamalla tämä alimpaan yhtälöön saadaan

$$2x + \frac{4x}{9} - 22 = 0 \;\Leftrightarrow\; (2 \cdot 9 + 4)\,x - 22 \cdot 9 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 9,$$

jolloin $y = \frac{4}{9} \cdot 9 = 4$. Sidotun ääriarvotehtävän ainoa mahdollinen ääriarvokohta on siis $(9, 4)$. Kohdan (1) perusteella tiedetään, että sidottu minimi on olemassa, joten funktion f pienin arvo side-ehdon määräämällä suoralla on

$$f(9, 4) = 9^2 + 2 \cdot 4^2 - 9 \cdot 4 = 81 + 32 - 36 = 77\,.$$

8. Erään tehtaan tuotantomäärä riippuu työvoimaan ja laitteistoon investoiduista pääomista seuraavasti: jos tehdas on investoinut työvoimaan x tuhatta euroa ja laitteistoon y tuhatta euroa, niin tuotantomäärän Q (tonnia) ilmoittaa funktio

$$Q(x, y) = 60 \cdot \sqrt[3]{xy^2}\,.$$

Laske, kuinka 120 000 euron budjetti olisi jaettava näiden tuotantotekijöiden kesken, jotta tehtaan tuotanto olisi mahdollisimman suuri.

Ratkaisu. Budjettirajoite määrää, että $x + y = 120$. Toisaalta muuttujien x ja y negatiiviset arvot eivät ole järkeviä, joten summaehdon lisäksi on oltava voimassa $0 \le x \le 120$ ja $0 \le y \le 120$. Funktio Q saa näiden ehtojen rajaamassa määrittelyjoukkonsa osassa suurimman arvonsa samassa kohdassa kuin sen kolmas potenssi

$$Q(x, y)^3 = 60^3 xy^2$$

jota on helpompi käsitellä. Esittämällä side-ehto $x + y = 120$ muodossa $x = 120 - y$ päädytään tutkimaan yhden muuttujan funktiota

$$h(y) = Q(y, 120 - y)^3 = 60^3(120 - y)\,y^2 = 60^3(120\,y^2 - y^3)$$

jolle pitää hakea suurin arvo, kun $y \in [0, 120]$. Koska

$$h'(y) = 60^3(240\,y - 3y^2) = 3 \cdot 60^3 y(80 - y) = 0 \;\Leftrightarrow\; y = 0 \;\text{ tai }\; y = 80$$

ja $h(0) = h(120) = 0 < h(80)$, niin $h(y)$ on tarkasteluvälillä $[0, 120]$ suurimmillaan kohdassa $y = 80$. Vastaavasti tuotanto $Q(x, y)$ on side-ehdon $x + y = 120$ ja vaatimusten $x \ge 0$, $y \ge 0$ toteutuessa suurimmallaan, kun $y = 80$ ja $x = 120 - 80 = 40$.

Vastaus: työvoimaan tulee investoida 40 000 euroa ja laitteistoon 80 000 euroa.