

1. Antti talletti tililleen 6000 euroa toukokuun 1. päivänä 2005 ja 12000 euroa heinäkuun 1. päivänä 2006. Tilin veroton korkokanta on 3,0 %/vuosi. Mikä on Antin talletusten yhteisarvo vuoden 2010 lopussa? Muita tilitapahtumia ei ole ja korko lisätään pääomaan kunkin vuoden lopussa. (Käytä saksalaista korkoaajanlaskua, jossa jokainen kuukausi on $\frac{1}{12}$ vuotta.) [20803,45 €]

Ratkaisu. a) 6000 euron talletuserän karttuminen:

$$31.12.2005: 6000 \text{ eur} + 8 \text{ kk:n korko } \frac{8}{12} \cdot \frac{3}{100} \cdot 6000 \text{ eur} = 6120 \text{ eur}$$

$$31.12.2006: 1,03 \cdot 6120 \text{ eur}$$

$$31.12.2007: 1,03^2 \cdot 6120 \text{ eur}$$

⋮

$$31.12.2010: 1,03^5 \cdot 6120 \text{ eur}$$

b) 12000 euron talletuserän karttuminen:

$$31.12.2006: 12000 \text{ eur} + 6 \text{ kk:n korko } \frac{6}{12} \cdot \frac{3}{100} \cdot 12000 \text{ eur} = 12180 \text{ eur}$$

$$31.12.2007: 1,03 \cdot 12180 \text{ eur}$$

$$31.12.2008: 1,03^2 \cdot 12180 \text{ eur}$$

$$31.12.2009: 1,03^3 \cdot 12180 \text{ eur}$$

$$31.12.2010: 1,03^4 \cdot 12180 \text{ eur}$$

Antin talletusten yhteisarvo on vuoden 2010 lopussa siis

$$1,03^5 \cdot 6120 \text{ €} + 1,03^4 \cdot 12180 \text{ €} = \mathbf{20803,45 \text{ €}}$$

2. Tarkastellaan tiliä, jolla korko liitetään pääomaan vuoden välein. Kuinka suuri pitäisi tilin nettokorkokannan olla, jotta tilille tehty kertatalletus kasvaisi korkoineen 8 vuodessa kaksinkertaiseksi? [9,05 %/vuosi]

Ratkaisu. Olkoon haluttu korkokerroin p %/vuosi. Talletus T kasvaa korkoineen 8 vuodessa pääomaksi $r^8 \cdot T$, missä $r = 1 + p/100$ (korkotekijä). Jotta kasvanut pääoma olisi talletukseen nähden kaksinkertainen, tulee siis olla

$$r^8 \cdot T = 2T$$

$$r^8 = 2$$

$$r = 2^{1/8}$$

$$1 + \frac{p}{100} = 2^{0,125}$$

$$\frac{p}{100} = 2^{0,125} - 1 \approx 0,090507733$$

$$p \approx 9,05$$

Nettokorkokannan pitäisi siis olla 9,05 %/vuosi.

3. Vanhemmat ovat perustaneet lapselleen tilin, jonne he tallettavat tulevaa opiskeluaikaa varten. He tallettavat kymmenen vuoden ajan jokaisen vuoden alussa 1200 euroa tälle tilille, jonka veroton korkokanta on 1,9 %/vuosi ja jolla korko liitetään pääomaan aina vuoden lopussa. Kuinka suureksi summaksi nämä talletukset ovat kasvaneet korkoineen kymmenennen vuoden loppuun mennessä? [13328,27 €]

Ratkaisu. Määrätään ensin kunkin talletuksen arvo (kasvanut pääoma) viimeisen talletuksen tapahtumahetkellä eli kymmenennen vuoden *alussa*.

$$\begin{aligned} 10. \text{ talletus:} & \quad 1200 \text{ €} \\ 9. \text{ talletus:} & \quad 1,019 \cdot 1200 \text{ €} \\ 8. \text{ talletus:} & \quad 1,019^2 \cdot 1200 \text{ €} \\ 7. \text{ talletus:} & \quad 1,019^3 \cdot 1200 \text{ €} \\ & \quad \vdots \\ 1. \text{ talletus:} & \quad 1,019^9 \cdot 1200 \text{ €} \end{aligned}$$

Nämä kasvaneet pääomat muodostavat 10-jäsenisen geometrisen jonon, jonka 1. jäsen on 1200 € ja jonka suhdeluku on 1,019. Tilin saldo kymmenennen vuoden alussa on näiden summana (geometrisen summan kaavaa soveltaen)

$$1200 \text{ €} \cdot \frac{1 - 1,019^{10}}{1 - 1,019} = 13079,7525078704 \text{ €}$$

Kymmenennen vuoden lopussa tähän summaan lisätään vielä sille vuoden aikana kertynyt korko, joten tilin saldo kymmenennen vuoden *lopussa* on

$$1,019 \cdot 13079,7525078704 \text{ €} \approx 13328,27 \text{ €}.$$

Vastaus: Kymmenennen vuoden lopussa tilillä on 13328,27 €.

4. Oskari haaveilee maailmanympärimatkasta. Matkaa varten hän aikoo säästää vielä 8000 euroa. Tätä varten hänellä on tili, jonka veroton korkokanta on 1,9 %/vuosi. Oskari aikoo tallettaa tililleen neljän vuoden ajan jokaisen vuoden lopussa saman summan. Mikä summa Oskarin pitäisi aina vuoden lopussa tallettaa, jotta tilillä olisi neljännen vuoden lopussa korkoineen 8000 euroa? Korko liitetään pääomaan aina vuoden lopussa. [1943,89 €]

Ratkaisu. Listataan Eskon suorittamien talletusten kasvaneet pääomat neljännen vuoden lopussa, kun jokainen talletus on suuruudeltaan T :

$$\begin{aligned} 4. \text{ talletus:} & \quad T \\ 3. \text{ talletus:} & \quad 1,019 \cdot T \\ 2. \text{ talletus:} & \quad 1,019^2 \cdot T \\ 1. \text{ talletus:} & \quad 1,019^3 \cdot T \end{aligned}$$

Talletusten yhteisarvo neljännen vuoden lopussa on näiden summana

$$T \cdot \frac{1 - 1,019^4}{1 - 1,019} = 4,115450859 \cdot T.$$

Jotta tilillä olisi 4. vuoden lopussa 8000 euroa, tulee siis olla

$$\begin{aligned} 4,115450859 \cdot T & = 8000 \text{ €} \\ T & = \frac{8000 \text{ €}}{4,115450859} \approx 1943,89 \text{ €} \end{aligned}$$

Vastaus: 1943,89 euroa.

5. Edellisen tehtävän Oskari muuttaakin mielensä ja päättää tehdä vakiomääräisen talletuksen jokaisen kuukauden lopussa. Mikä summa hänen pitäisi kuukausittain tallettaa, jotta tilillä olisi vuoden lopussa korkoineen edellisessä tehtävässä saatu summa? [160,59 €]

Ratkaisu. Halutaan, että tilille vuoden aikana talletettujen kuukausierien yhteisarvo korkoineen on vuoden lopussa 1943,89 euroa. Oletetaan, että Oskari tallettaa t euroa jokaisen kuukauden lopussa. Tammikuun talletus kasvaa korkoa vuoden loppuun mennessä 11 kk, helmikuun talletus 10 kk jne. Joulukuun talletus ei ehdi kerryttää korkoa tarkasteltavan vuoden aikana. Kuukausitalletuksista kertyy korkoa vuoden loppuun mennessä yhteensä

$$\left(\frac{11}{12} + \frac{10}{12} + \cdots + \frac{1}{12} + \frac{0}{12}\right) \cdot \frac{1,9}{100} t = 12 \cdot \frac{11/12 + 0/12}{2} \cdot 0,019 t = 0,1045 t$$

euroa. (Huomaa, että sulkujen sisällä on aritmeettinen summa.) Korkoineen näistä kuukausitalletuksista kertyy vuoden loppuun mennessä siis kaikkiaan

$$12 t + 0,1045 t = 12,1045 t$$

euroa. Koska

$$12,1045 t = 1943,89 \Leftrightarrow t = \frac{1943,89}{12,1045} \approx 160,59,$$

Oskarin pitäisi siis tallettaa jokaisen kuukauden lopussa 160,59 euroa päästäkseen samaan lopputulokseen kuin edellisessä tehtävässä.