

1. Kuinka suuri käteissumma pitäisi maksaa kaupantekohetkellä, jotta se vastaisi 7,5 %:n vuotuisen korkokannan mukaan seuraavaa maksuohjelmaa: 25000 euroa heti ja tämän jälkeen vuoden välein viiden vuoden ajan 15000 euroa?

**Ratkaisu.** Maksuohjelman käteisarvo on

$$25000 + \frac{15000}{1,075} + \frac{15000}{1,075^2} + \frac{15000}{1,075^3} + \frac{15000}{1,075^4} + \frac{15000}{1,075^5} = 85688,27$$

euroa, sillä jos talletetaan tämä summa kaupantekohetkellä tilille, jonka (veroton) korkokanta on 7,5 %/vuosi ja jolla korko liitetään pääomaan vuoden välein siten, että ensimmäinen korkojakso alkaa kaupantekohetkeestä, niin tilin varat korkoineen riittävät juuri ja juuri maksuohjelman toteuttamiseen.

**Vaihtoehtoinen ratkaisu.** Ajatellaan, että myyjäosapuolella on tili, jolle maksetaan 7,5 %:n vuotuisia korkoa ja jolle korko liitetään pääomaan kuten edellä. Maksut ohjataan tälle tilille maksuohjelman mukaisesti. Viimeisen maksun tapahduttua (viiden kokonaisen korkojakson päätteeksi) tällä tilillä on korkoineen

$$\begin{aligned} & 25000 \cdot 1,075^5 + 15000 \cdot 1,075^4 + 15000 \cdot 1,075^3 + 15000 \cdot 1,075^2 + 15000 \cdot 1,075 + 15000 \\ & = 25000 \cdot 1,075^5 + 15000 \cdot (1 + 1,075 + 1,075^2 + 1,075^3 + 1,075^4) \\ & = 25000 \cdot 1,075^5 + 15000 \cdot \frac{1 - 1,075^5}{1 - 1,075} = 123016,60 \end{aligned}$$

euroa. Tämä summa on maksuohjelman *loppuarvo*. Maksuohjelman *käteisarvo* on se summa, joka kaupantekohetkellä tilille talletettuna kasvaisi maksuohjelman keston aikana korkoineen loppuarvoksi. Maksuohjelman kesto on 5 korkojaksoa. Siten käteisarvo on

$$\frac{123016,60}{1,075^5} \text{ €} = 85688,27 \text{ €}$$

*Vastaus:* 85688,27 euroa.

2. Aapo aikoo ostaa Kaapolta veneen, jonka Kaapo on valmis myymään 5000 euron käteishinnalla. Aapo haluaisi kuitenkin maksaa veneen osamaksulla kuudessa erässä vuoden välein siten, että ensimmäinen erä maksettaisiin vuoden kuluttua ostohetkeestä ja ensimmäiset viisi maksuerää olisivat 1000 euron suuruisia. Kuinka suuri tulee viimeisen maksuerän olla, jotta Aapon ehdottama osamaksusopimus vastaisi 5000 euron käteissummaa kaupantekohetkellä 8 %:n vuotuisen korkokannan mukaan?

(Yksi ratkaisutapa on laskea ensin kunkin yksittäisen maksuerän käteisarvo kaupantekohetkellä. Näiden käteisarvojen summa on osamaksusopimuksen käteisarvo kaupantekohetkellä.)

**Ratkaisu.** Olkoon viimeinen osamaksuerä  $X$  euroa. Vihjeen mukaisesti laskettuna osamaksusopimuksen käteisarvo on

$$\begin{aligned} & \frac{1000}{1,08} + \frac{1000}{1,08^2} + \frac{1000}{1,08^3} + \frac{1000}{1,08^4} + \frac{1000}{1,08^5} + \frac{X}{1,08^6} \\ &= \frac{X}{1,08^6} + \frac{1000}{1,08^5} (1 + 1,08 + \dots + 1,08^4) \\ &= \frac{X}{1,08^6} + \frac{1000}{1,08^5} \cdot \frac{1 - 1,08^5}{1 - 1,08} \end{aligned}$$

euroa ja toisaalta käteisarvo on 5000 euroa. Ratkaistaan  $X$  näin saadusta yhtälöstä:

$$\begin{aligned} 5000 &= \frac{X}{1,08^6} + \frac{1000}{1,08^5} \cdot \frac{1 - 1,08^5}{1 - 1,08} \\ \frac{X}{1,08^6} &= 5000 - \frac{1000}{1,08^5} \cdot \frac{1,08^5 - 1}{0,08} \\ X &= 5000 \cdot 1,08^6 - 1000 \cdot 1,08 \cdot \frac{1,08^5 - 1}{0,08} = 1598,44. \end{aligned}$$

(Tässäkin voidaan vaihtoehtoisesti laskea ensin maksusopimuksen loppuarvo, määrätä siitä käteisarvo  $X$ :n suhteen ja lopulta ratkaista saatu yhtälö. Huomaa, että viimeinen osamaksu tapahtuu 6 vuoden päästä kaupantekohetkestä, kun ”diskonttaat” loppuarvon kaupantekohetkeen. [*Diskonttaus* tarkoittaa tulevan rahavirran nykyarvon laskemista.]

*Vastaus:* 1598,44 €

3. Meiju Meikäläisen on vallannut autokuume ja hän päättää ottaa pankista tasaerälainan, jota maksetaan takaisin kuukausittain. Hän tarvitsee 9000 euroa ja haluaa selvittää takaisinmaksusta kolmessa vuodessa. Mikä tulee olemaan kuukausittainen maksuerä, kun pankin korkokanta on 7,2 %/vuosi? Paljonko Meiju joutuu kaiken kaikkiaan maksamaan korkoja?

**Ratkaisu.** Kuukausittainen tasaerä  $A$  lasketaan kaavalla

$$A = \frac{(1 + p/100)^n \cdot (p/100)}{(1 + p/100)^n - 1} \cdot N$$

missä  $N = 9000 \text{ €}$  on velkapääoma alussa,  $n$  on takaisinmaksuerien määrä ja  $p$  määräytyy ehdosta, että korkokanta on  $p$  %/korkojakso. Koska korkojakso on kuukausi, laina-aika on 3 vuotta ja korkokanta on 7,2 %/vuosi, niin  $n = 3 \cdot 12 = 36$  ja  $p = \frac{7,2}{12} = 0,6$ . Siten

$$A = \frac{1,006^{36} \cdot 0,006}{1,006^{36} - 1} \cdot 9000 \text{ €} = 278,72 \text{ €}.$$

Tämän tasaerälainan korkokulut ovat siis

$$nA - N = 36 \cdot 278,72 \text{ €} - 9000 \text{ €} = 1033,92 \text{ €}.$$

4. Olisiko edellisen tehtävän Meijun kannattanut valita lainan takaisinmaksutavaksi tasaerien sijaan tasalyhennykset kolmen kuukauden välein, jos pankki olisi tarjonnut sellaista vaihtoehtoa samalla vuotuisella korkokannalla?

**Ratkaisu.** Tasalyhennyslainan korkoerät muodostavat aritmeettisen jonon, joten sen korkokustannukset  $K$  saadaan kaavasta

$$K = m \cdot \frac{a_1 + a_m}{2}$$

missä  $m$  on takaisinmaksuerien määrä,  $a_1$  on ensimmäisen takaisinmaksuerän yhteydessä maksettava korko ja  $a_m$  on viimeisen takaisinmaksuerän yhteydessä maksettava korko. Ensimmäinen korko maksetaan koko lainasummasta 3 kk:n ajalta, joten sen suuruus on

$$a_1 = \frac{3}{12} \cdot \frac{7,2}{100} \cdot 9000 \text{ €} = 162 \text{ €}.$$

Viimeisen korkoerän alussa lainaa on jäljellä lyhennyksen verran. Viimeinen korko maksetaan siis lyhennyksen suuruudesta lainapääomasta. Lainaa lyhennetään neljä kertaa vuodessa kolmen vuoden ajan (siis  $m = 4 \cdot 3 = 12$ ), joten lyhennyksen osuus kustakin takaisinmaksuerästä on  $9000/12 = 750$  euroa. Viimeisen takaisinmaksuerän yhteydessä maksettava korko on siten

$$a_m = \frac{3}{12} \cdot \frac{7,2}{100} \cdot 750 \text{ €} = 13,5 \text{ €}.$$

Tasalyhennysvaihtoehdon korkokustannukset ovat siis

$$K = 12 \cdot \frac{162 + 13,5}{2} \text{ €} = 1053 \text{ €}.$$

Tasaerävaihtoehdon korkokulut  $1033,92 \text{ €}$  ovat pienemmät, joten Meijun kannattaa valita ennemmin tasaerälaina kuukauden maksuvälein.

5. Asuntolaina maksetaan takaisin puolivuositain tapahtuvin  $1500$  euron tasaerin  $14$  vuodessa. Kuinka suuri laina on kyseessä, jos lainan korkokanta on pysyvästi  $7\%$ /vuosi? Anna vastaus kymmenen euron tarkkuudella.

**Ratkaisu.** Lainan korkojakso on puoli vuotta, lainan korkokanta on  $\frac{7}{2}\% / \frac{1}{2}v = 3,5\%$ /korkojakso ja takaisinmaksueriä on  $2 \cdot 14 = 28$ , joten lainan suuruus  $N$  ratkeaa yhtälöstä

$$1500 \text{ €} = \frac{1,035^{28} \cdot 0,035}{1,035^{28} - 1} N.$$

Ratkaisuksi saadaan

$$N = 1500 \cdot \frac{1,035^{28} - 1}{1,035^{28} \cdot 0,035} \text{ €} = 26500,53 \text{ €}.$$

*Vastaus:* Kyseisen lainan suuruus on  $26500$  euroa.