Matematiikan peruskurssi (MATY020)
Harjoitus 4 to 12.2.2009 **ratkaisut**

Tehtävissä 1 ja 2 tarkastellaan matriiseja

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 5 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \text{ ja } C = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Laske **(a)** $3A - 2A^T$ **(b)** $2B - C^T$
(merkintä X^T tarkoittaa matriisin X transpoosia)

Ratk. (a) $3A - 2A^T = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $2B - C^T = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 10 & 4 \\ 8 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 6 & 3 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$

2. Laske **(a)** A^3 (eli AAA) **(b)** CB **(c)** C^TA

Ratkaisu.

(a) $AA = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)\cdot(-1) + 2\cdot 0 & -1\cdot 2 + 2\cdot 3 \\ 0\cdot(-1) + 3\cdot 0 & 0\cdot 3 + 3\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$

joten

$$A^3 = (AA)A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 14 \\ 0 & 27 \end{bmatrix}$$

(b) $CB = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 5 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 & 4 \\ 13 & -3 \end{bmatrix}$

(c) $C^TA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 11 \\ -4 & 14 \end{bmatrix}$

3. Ratkaise luvut x ja y yhtälöstä

$$2\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Ratkaisu. Yhtälön vasen puolesta saadaan matriisi $\begin{bmatrix} 2x-3 \\ 2y-4 \end{bmatrix}$ ja oikeasta puolesta $\begin{bmatrix} 5\cdot 5 \\ 5\cdot(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ -20 \end{bmatrix}$, joten x ja y ratkeavat yhtälöparista $\begin{cases} 2x - 3 = 25 \\ 2y - 4 = -20 \end{cases}$; ratkaisu on $x = 14$, $y = -8$.

Tehtävissä 4 ja 5 tarkastellaan matriisia $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$.

4. Keksi sellainen matriisi $B \neq \mathbf{0}$, että AB on nollamatriisi.

Ratk. AB on määritelty, jos matriisissa B on kaksi riviä. Jos $B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, niin

$$AB = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} 2a - b = 0 \\ -6a + 3b = 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; b = 2a\,.$$

Siten $AB = \mathbf{0}$ esimerkiksi kun $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (tai $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ tai $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ jne.)

5. Onko olemassa matriisia $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ siten, että $AB = I$?
(Tässä I tarkoittaa 2×2-yksikkömatriisia.)

Ratkaisu. Käytetään hyväksi determinantin ominaisuutta

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

sen osoittamiseen, että tällaista matriisia B ei voi olla. Nimittäin

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - (-1)(-6) = 0$$

ja

$$\det(I) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1.$$

Siis jos olisi olemassa 2×2-matriisi B siten, että $AB = I$, niin

$$0 = \det(A)\det(B) = \det(AB) = \det(I) = 1$$

mikä on ilmeinen ristiriita.

6. Millä luvun r arvoilla matriisitulot AB ja BA ovat samat, kun

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} -r & 3 \\ 4 & r \end{bmatrix}?$$

Ratk. $AB = \begin{bmatrix} -2r - 12 & 6 - 3r \\ 4r + 4 & -12 + r \end{bmatrix}$ ja $BA = \begin{bmatrix} -2r - 12 & 3r + 3 \\ 8 - 4r & -12 + r \end{bmatrix}$, joten

$$AB = BA \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} 6 - 3r = 3r + 3 \\ 4r + 4 = 8 - 4r \end{cases} \;\Leftrightarrow\; r = \tfrac{1}{2}\,.$$

7. Laske determinantti

$$D = \begin{vmatrix} a+3 & a+2 & a+1 \\ a-3 & a-2 & a-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Ratkaisu. Kolmirivisen determinantin määritelmää käyttäen tämän determinantin arvoksi saadaan nolla:

$$\begin{aligned}
D &= (a+3)\begin{vmatrix} a-2 & a-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (a+2)\begin{vmatrix} a-3 & a-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (a+1)\begin{vmatrix} a-3 & a-2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \\
&= (a+3)\left((a+2)-(a-1)\right) - (a+2)\left((a-3)-(a-1)\right) + (a+1)\left((a-3)-(a-2)\right) \\
&= (a+3)\cdot 1 - (a+2)\cdot 2 + (a+1)\cdot 1 \\
&= a+3-2a-4+a+1 = 0\,.
\end{aligned}$$

8. Osoita laskemalla, että

$$\begin{vmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ c_1 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_1 \\ c_2 & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}$$

(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1 ja d_2 saavat olla mitä tahansa reaalilukuja).

Ratkaisu.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{vmatrix} &= (a_1+a_2)(d_1+d_2) - (b_1+b_2)(c_1+c_2) \\
&= a_1d_1 + a_1d_2 + a_2d_1 + a_2d_2 - b_1c_1 - b_1c_2 - b_2c_1 - b_2c_2 \\
&= (a_1d_1 - b_1c_1) + (a_1d_2 - b_2c_1) + (a_2d_1 - b_1c_2) + (a_2d_2 - b_2c_2) \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ c_1 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_1 \\ c_2 & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$