Matematiikan peruskurssi (MATY020)
Harjoitus 5 to 19.2.2009 $\boxed{\textbf{ratkaisut}}$

1. Ratkaise **(a)** Cramerin säännöllä **(b)** Gaussin ja Jordanin menetelmällä yhtälöpari

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 5 \\ -2x_1 + 3x_2 = 1 \end{cases}$$

ja tarkista tulos sijoittamalla saamasi ratkaisu yhtälöihin.

Ratkaisu. Yhtälöpari vastaa matriisiyhtälöä $AX = B$, missä

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Kerroinmatriisin A determinantti

$$|A| = 3 \cdot 3 - 2 \cdot (-2) = 9 + 4 = 13$$

ei ole nolla, joten yhtälöparin voi ratkaista Cramerin säännöllä. Korvaamalla kerroinmatriisin 1. sarake matriisilla B saadaan matriisi

$$A_1 = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

jonka determinantti on $|A_1| = 5{\cdot}3{-}2{\cdot}1 = 15{-}2 = 13$. Korvaamalla kerroinmatriisin 2. sarake B:llä saadaan puolestaan matriisi

$$A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

jonka determinantti on $|A_2| = 3 \cdot 1 - 5 \cdot (-2) = 3 + 10 = 13$. Yhtälöparin ratkaisu on siten

$$\begin{cases} x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{13}{13} = 1 \\ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{13}{13} = 1 \end{cases}$$

(b) Yhtälöparin laajennetusta kerroinmatriisista päädytään esim. vaihein

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} R_1 + R_2 \\ \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 6 \\ -2 & 3 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} \\ R_2 + 2R_1 \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 13 & 13 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \\ \frac{1}{13}R_2 \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} R_1 - 5R_2 \\ \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

ratkaisuun $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1\,. \end{cases}$ *Tarkistus:* $\begin{cases} 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5 & \text{(pätee)} \\ -2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 1 & \text{(pätee).} \end{cases}$

2. Ratkaise Cramerin säännöllä yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

Ratkaisu. Olkoon A yhtälöryhmän kerroinmatriisi ja olkoon A_k se 3×3-matriisi, joka saadaan korvaamalla kerroinmatriisin k:s sarake yhtälöryhmän oikeaa puolta edustavalla sarakkeella $\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4 \end{bmatrix}^T$ ($k = 1, 2, 3$). Koska

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0, \qquad \det(A_1) = \begin{vmatrix} 9 & 2 & 3 \\ 24 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 12,$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 4 & 24 & 6 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -6 \qquad \text{ja} \qquad \det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 4 & 5 & 24 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 9,$$

niin Cramerin säännön nojalla yhtälöryhmän ratkaisu on

$$\begin{cases} x_1 = \det(A_1)/\det(A) & = 4 \\ x_2 = \det(A_2)/\det(A) & = -2 \\ x_3 = \det(A_3)/\det(A) & = 3 \end{cases}$$

3. Ratkaise Gaussin ja Jordanin menetelmällä yhtälöryhmä

$$\begin{cases} -x + y - z = -1 \\ 3x + 2y - z = 4 \\ 2x - y - 3z = -2 \end{cases}$$

Ratkaisu. Välivaihein

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & -3 & -2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} \\ R_2 + 3R_1 \\ R_3 + 2R_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} -R_1 \\ R_3 \\ R_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 5 & -4 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} \\ \\ R_3 - 5R_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 21 & 21 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \frac{1}{21}R_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} R_1 - R_3 \\ R_2 + 5R_3 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} R_1 + R_2 \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

saadaan ratkaisuksi $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$.

4. Ratkaise Gaussin ja Jordanin menetelmällä yhtälöryhmä

$$\begin{cases} -x + y - 2z = -1 \\ 3x + 2y - 4z = 4 \\ 2x - y + 2z = -2 \end{cases}$$

Ratkaisu. Välivaihein

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & -4 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right]
\qquad
\begin{array}{r} \\ R_2+3R_1 \\ R_3+2R_1 \end{array}
\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & -10 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{r} -R_1 \\ R_3 \\ R_2 \end{array}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 5 & -10 & 1 \end{array}\right]
\qquad
\begin{array}{r} \\ \\ R_3-5R_2 \end{array}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 21 \end{array}\right]
$$

päädytään kaavioon, jonka alin rivi esittää yhtälöä $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 21$. Koska tämä on aina epätosi, yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

5. Potilaan ruoka-annokseen kuuluu 340 yksikköä kalsiumia, 180 yksikköä rautaa ja 220 yksikköä A-vitamiinia. Ruokalajit I, II ja III sisältävät mainittuja aineita 100 grammaa kohti seuraavasti:

Ruokalaji	I	II	III
kalsium	120	40	80
rauta	40	40	80
A-vitamiini	40	120	80

Kuinka monta grammaa kutakin ruokalajia tarvitaan yhteen ruoka-annokseen? Ratkaise tehtävä matriisilaskennan keinoin.

Ratkaisu. Jakamalla taulukon luvut 100:lla selviää, kuinka monta yksikköä kalsiumia, rautaa ja A-vitamiinia on yhdessä grammassa kutakin ruokalajia. Jos ruoka-annokseen sisällytetään x_1 grammaa ruokalajia I, x_2 grammaa ruokalajia II ja x_3 grammaa ruokalajia III, niin ruoka-annos sisältää siten

- $1{,}2\,x_1 + 0{,}4\,x_2 + 0{,}8\,x_3$ yksikköä kalsiumia,
- $0{,}4\,x_1 + 0{,}4\,x_2 + 0{,}8\,x_3$ yksikköä rautaa ja
- $0{,}4\,x_1 + 1{,}2\,x_2 + 0{,}8\,x_3$ yksikköä A-vitamiinia

mikä johtaa yhtälöryhmään

$$
\begin{cases}
1{,}2\,x_1 + 0{,}4\,x_2 + 0{,}8\,x_3 = 340 \\
0{,}4\,x_1 + 0{,}4\,x_2 + 0{,}8\,x_3 = 180 \\
0{,}4\,x_1 + 1{,}2\,x_2 + 0{,}8\,x_3 = 220
\end{cases}
$$

Muodostetaan yhtälöryhmän laajennettu kerroinmatriisi ja sovelletaan Gaussin ja Jordanin menetelmää.

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 1{,}2 & 0{,}4 & 0{,}8 & 340 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}8 & 180 \\ 0{,}4 & 1{,}2 & 0{,}8 & 220 \end{array}\right]
\qquad
\begin{array}{r} 2{,}5R_1 \\ 2{,}5R_2 \\ 2{,}5R_3 \end{array}
\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 850 \\ 1 & 1 & 2 & 450 \\ 1 & 3 & 2 & 550 \end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{r} R_3 \\ \\ R_1 \end{array}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 550 \\ 1 & 1 & 2 & 450 \\ 3 & 1 & 2 & 850 \end{array}\right]
\qquad
\begin{array}{r} \\ R_2-R_1 \\ R_3-3R_1 \end{array}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 550 \\ 0 & -2 & 0 & -100 \\ 0 & -8 & -4 & -800 \end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{r}
-\frac{1}{2}R_2 \\ -\frac{1}{4}R_3
\end{array}
\left[\begin{array}{ccc|c}
1 & 3 & 2 & 550 \\
0 & 1 & 0 & 50 \\
0 & 2 & 1 & 200
\end{array}\right]
\qquad
R_3 - 2R_2
\left[\begin{array}{ccc|c}
1 & 3 & 2 & 550 \\
0 & 1 & 0 & 50 \\
0 & 0 & 1 & 100
\end{array}\right]
$$

$$
R_1 - 2R_3
\left[\begin{array}{ccc|c}
1 & 3 & 0 & 350 \\
0 & 1 & 0 & 50 \\
0 & 0 & 1 & 100
\end{array}\right]
\qquad
R_1 - 3R_2
\left[\begin{array}{ccc|c}
1 & 0 & 0 & 200 \\
0 & 1 & 0 & 50 \\
0 & 0 & 1 & 100
\end{array}\right]
$$

Viimeinen kaavio esittää ratkaisua $\begin{cases} x_1 = 200 \\ x_2 = 50 \\ x_3 = 100 \end{cases}$.

Ruoka-annokseen tarvitaan siis 200 grammaa ruokalajia I, 50 grammaa ruokalajia II ja 100 grammaa ruokalajia III.

6. Tutki, onko matriisi $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ matriisin $A = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ käänteismatriisi.

Ratkaisu: koska $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$, niin A ja B ovat toistensa käänteismatriiseja.

7. Millä reaaliluvun a arvoilla matriisi $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$ on kääntyvä?

Ratkaisu. A on kääntyvä täsmälleen silloin, kun $\det(A) \neq 0$. Koska

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} &= a \cdot \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= a(a^2 - 1) - a = a(a^2 - 2)
\end{aligned}
$$

niin $\det(A) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ tai $a^2 = 2 \Leftrightarrow a = 0$ tai $a = \pm\sqrt{2}$.
A on siis kääntyvä täsmälleen silloin, kun a ei ole 0, $-\sqrt{2}$ eikä $\sqrt{2}$.

8. Tutki, onko matriisilla

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}
$$

käänteismatriisi. Jos on, määrää A^{-1}. Tarkista tulos.

Ratkaisu. Koska

$$
\det(A) = 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 1 \neq 0,
$$

A on kääntyvä eli käänteismatriisi A^{-1} on olemassa. Ratkaistaan käänteismatriisi Gaussin ja Jordanin menetelmällä: jos kaaviosta $[A|I]$ päästään sallituilla rivioperaatioilla kaavioon $[I|B]$, niin $B = A^{-1}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} R_3 \\ \\ R_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \\ R_2 + R_1 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} \\ \\ R_3 + R_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} R_1 + R_3 \\ -R_2 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} R_1 + R_2 \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Siis $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Tarkistus: olkoon B $= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Koska $AB = \cdots = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$,

niin B on A:n käänteismatriisi. (Vaihtoehtoisesti riittää tarkistaa, että $BA = I$).

9. Ratkaise 3×3-matriisi X yhtälöstä $AX - BX = A$, kun

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 6 \\ 6 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Ratkaisu. $AX - BX = (A - B)X$ [1] ja matriisi

$$A - B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

on kääntyvä, sillä $\det(A - B) = -1 \neq 0$. Siten

$$\begin{aligned} AB - AX = A \;&\Leftrightarrow\; (A - B)X = A \\ &\Leftrightarrow\; (A - B)^{-1}(A - B)X = (A - B)^{-1}A \\ &\Leftrightarrow\; IX = (A - B)^{-1}A \end{aligned}$$

eli $X = (A - B)^{-1}A$.

Ratkaistaan käänteismatriisi $(A - B)^{-1}$ Gaussin ja Jordanin menetelmällä. Lähdetään kaaviosta, jonka vasemmassa lohkossa on $A - B$ ja oikeassa lohkossa yksikkömatriisi.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

[1] Mutta: $AX - BX \neq X(A - B)$!!!

Vaihtamalla 1. ja 3. rivi keskenään päästään kaavioon

$$\begin{array}{c} R_3 \\ \\ R_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Tästä ei tarvitse enää jatkaa, sillä vasempaan lohkoon on saatu yksikkömatriisi ja oikeassa lohkossa on siten $(A-B)^{-1}$. Näin ollen

$$X = (A-B)^{-1}A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$