Matematiikan peruskurssi (MATY020)
Harjoitus 6 to 26.2.2009 $\boxed{\textbf{ratkaisut}}$

1. Laske derivaatan määritelmää käyttäen $f'(2)$, kun $f(x) = (2x+1)^2$. Tarkista tulos derivoimissääntöjen avulla. (*Vihje:* hyödynnä kaavaa $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ erotusosamäärän raja-arvoa laskiessasi.)

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(2x+1)^2 - 5^2}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{((2x+1)-5)\,((2x+1)+5)}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{(2x-4)\,(2x+6)}{x-2} = \lim_{x\to 2} 2\cdot(2x+6) \\ &= 2\cdot(2\cdot 2+6) = 20 \end{aligned}$$

Tarkistus derivaattafunktion avulla:

$$Df(x) = 2\cdot(2x+1)\cdot D(2x+1) = 4\cdot(2x+1)$$

joten $f'(2) = 4\cdot(2\cdot 2+1) = 4\cdot 5 = 20\,.$

2. Määrää funktion (a) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+2x+5}$ (b) $g(x) = -\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\,,\ x \neq 0$

derivaattafunktio ja laske derivaatan arvo kohdassa $x = 1$.

Ratkaisu. (a) Sovelletaan osamäärän derivointisääntöä $D(u/v) = (u'v - uv')/u^2$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3\cdot(x^2+2x+5) - 3x\cdot(2x+2)}{(x^2+2x+5)^2} \\ &= \frac{-3x^2+15}{(x^2+2x+5)^2} \end{aligned}$$

(b) Sovelletaan derivointisääntöä $Dx^p = px^{p-1}$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= -Dx^{-2/5} = -(-\tfrac{2}{5})x^{-7/5} \\ &= \frac{2}{5x\sqrt[5]{x^2}} \end{aligned}$$

3. Funktioista $g\colon A \to B$ ja $f\colon B \to C$ saadaan yhdistämällä funktio $f \circ g\colon A \to C$, jonka arvot määräytyvät seuraavasti:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)), \ \text{kun } x \in A.$$

Olkoot $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktiot $f(x) = x+1$ ja $g(x) = 3-2x$. Muodosta yhdistetyt funktiot $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ ja $g \circ g$.

Ratkaisu:

$f \circ f(x) = f(f(x)) = f(x+1) = x+2$

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(3-2x) = 4-2x$

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x+1) = 3-2(x+1) = 1-2x$

$g \circ g(x) = g(g(x)) = g(3-2x) = 3-2(3-2x) = 3-6+4x = 4x-3$

Tehtävissä 4–6 muodosta funktion $f(x)$ derivaatta $f'(x)$ ja toinen derivaatta $f''(x)$.

4. $f(x) = \dfrac{x^4+1}{x}, \quad x \neq 0$

Ratkaisu. Koska $f(x) = x^3 + x^{-1}$, niin

$f'(x) = 3x^2 + (-1)x^{-2} = 3x^2 - \dfrac{1}{x^2}$ ja

$f''(x) = 6x - (-2x^{-3}) = 6x + \dfrac{2}{x^3}$

5. $f(x) = e^{x^2+1}$

Ratkaisu. Yleisesti $De^{u(x)} = u'(x)\, e^{u(x)}$, joten

$f'(x) = 2x\, e^{x^2+1}$ ja (tulon derivointisääntöä soveltaen)

$f''(x) = D(2x) \cdot e^{x^2+1} + 2x \cdot De^{x^2+1} = (2+4x^2)\, e^{x^2+1}$

6. $f(x) = \ln(1+e^x)$

Ratkaisu. Yleisesti $D \ln u(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$, joten

$f'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$ ja (osamäärän derivointisääntöä soveltaen)

$$f''(x) = \frac{De^x \cdot (1+e^x) - e^x \cdot D(1+e^x)}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x(1+e^x) - (e^x)^2}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

---

7. Määritä vakioiden a ja b arvot, kun tiedetään, että funktio

$$f(x) = (ax+b)\, e^x$$

toteuttaa ehdon $f''(x) = 2x\, e^x$ kaikilla muuttujan x arvoilla.

Ratkaisu. Määrätään funktion f toinen derivaatta:

$$\begin{aligned} f'(x) &= D(ax+b) \cdot e^x + (ax+b) \cdot De^x = a\, e^x + (ax+b)\, e^x \\ &= (ax+a+b)\, e^x \\ f''(x) &= D(ax+a+b) \cdot e^x + (ax+a+b) \cdot De^x = a\, e^x + (ax+a+b)\, e^x \\ &= (ax+2a+b)\, e^x \end{aligned}$$

Siis $f''(x) = 2x\, e^x$, mikäli $ax+2a+b$ ja $2x$ ovat sama polynomi. Vakioiden a ja b pitää siis toteuttaa yhtälöpari

$$\begin{cases} a = 2 \\ 2a + b = 0 \end{cases}$$

joten niillä on arvot $a = 2$, $b = -4$.

8. Ratkaise y muuttujan x funktiona yhtälöstä

$$x^2y^3 - 6 = 5y^3 + x$$

ja laske $y'(2)$.

Ratkaisu. Ratkaistaan yhtälö muuttujan y suhteen:

$$\begin{aligned} x^2y^3 - 6 = 5y^3 + x \;&\Leftrightarrow\; (x^2-5)y^3 = x+6 \\ &\Leftrightarrow\; y^3 = \frac{x+6}{x^2-5}\,, \end{aligned}$$

kun $x^2 - 5 \neq 0$ eli $x \neq \pm\sqrt{5}$. Yhtälö voidaan esittää siis ratkaistussa muodossa $y = y(x)$, missä

$$y(x) = \sqrt[3]{\frac{x+6}{x^2-5}} \quad \text{ja} \quad x \neq \pm\sqrt{5}\,.$$

Derivaattafunktio $y'(x)$ ratkeaisi nyt soveltamalla kuutiojuurilausekkeeseen yhdistetyn kuvauksen derivointisääntöä. Toisaalta derivaattafunktion yleistä lauseketta ei kysytty, ja $y'(2)$ voidaan määrittää helpommin derivoimalla yhtälö

$$y(x)^3 = \frac{x+6}{x^2-5} \tag{1}$$

puolittain: saadaan

$$3\,y(x)^2y'(x) = \frac{1\cdot(x^2-5) - (x+6)\cdot(2x)}{(x^2-5)^2} = \frac{-x^2-12x-5}{(x^2-5)^2}$$

eli

$$y'(x) = -\frac{x^2+12x+5}{3\,y(x)^2\,(x^2-5)^2}\,. \tag{2}$$

Sijoittamalla $x = 2$ yhtälöön (1) saadaan

$$y(2)^3 = \frac{2+6}{2^2-5} = -8 \;\Leftrightarrow\; y(2) = -2\,,$$

joten yhtälön (2) nojalla

$$y'(2) = -\frac{2^2+12\cdot 2+5}{3\cdot(-2)^2\,(2^2-5)^2} = -\frac{33}{12} = -\frac{11}{4} = -2\tfrac{3}{4}\,.$$

Vastaus: $y(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x+6}{x^2-5}}$ $(x \neq \pm\sqrt{5})$, $y'(2) = -2\tfrac{3}{4}$