Matematiikan peruskurssi (MATY020)
Harjoitus 7 to 5.3.2009 $\boxed{\textbf{ratkaisut}}$

1. (a) Määritä funktion

$$f(x) = e^x - e^{-x} - x + 1$$

derivaatan $f'(x)$ pienin mahdollinen arvo.

Ratkaisu. (a) Funktio f ja sen derivaatat ovat jatkuvia ja derivoituvia, joten derivaatan f' mahdolliset ääriarvot löytyvät toisen derivaatan f'' nollakohdista.

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x - e^{-x} \cdot (-1) - 1 = e^x + e^{-x} - 1 \\ f''(x) &= D(e^x + e^{-x} + 1) = e^x - e^{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 \;&\Leftrightarrow\; e^x = e^{-x} \\ &\Leftrightarrow\; x = -x \\ &\Leftrightarrow\; x = 0 \end{aligned}$$

Derivaatalla f' voi olla ääriarvo siis ainoastaan kohdassa $x = 0$. Käytetään toisen derivaatan testiä mahdollisen ääriarvon laadun selvittämiseksi. Funktion f' toinen derivaatta on f'''.

$$\begin{aligned} f'''(x) &= D(f''(x)) = e^x - e^{-x} \cdot (-1) = e^x + e^{-x} \\ f'''(0) &= e^0 + e^{-0} = 2 \end{aligned}$$

Koska $(f')''(0) > 0$, niin funktiolla f' on kohdassa $x = 0$ lokaali minimi. Toisaalta $x = 0$ on funktion f' ainoa ääriarvokohta, joten lokaali minimi

$$f'(0) = e^0 + e^{-0} - 1 = 1$$

on myös derivaatan *globaali* minimi eli pienin arvo.

Vastaus: Derivaatan $f'(x)$ pienin mahdollinen arvo on 1.

(b) Osoita kohdan (a) tuloksen avulla, että funktiolla f on täsmälleen yksi nollakohta. (*Vihje:* Bolzanon lause ja aito monotonisuus)

Ratkaisu. (i) Esimerkiksi arvot $f(-2) = e^{-2} - e^2 - (-2) + 1 \approx -4{,}25$ ja $f(0) = 1$ ovat erimerkkiset ja f on jatkuva välillä $[-2, 0]$, joten Bolzanon lauseen mukaan $f(x) = 0$ ainakin yhdessä kohdassa $x \in [-2, 0]$.

(ii) Kohdan (a) tuloksen nojalla $f'(x)$ ei ole missään lukua 1 pienempi, joten funktion f derivaatta on kaikkialla positiivinen. Siten f on aidosti kasvava funktio ja sellaisena saa kunkin arvonsa vain kerran. Erityisesti $f(x) = 0$ korkeintaan yhdessä kohdassa kohdassa x.

Yhdessä kohdat (i) ja (ii) osoittavat, että funktiolla f on täsmälleen yksi nollakohta.

2. Määrää funktion

$$f(x) = \frac{6x^2 + 6x + 12}{x^2 + 3}$$

lokaalit ääriarvot ja niiden laatu.

Ratkaisu. Koska x^2+3 on kaikkialla positiivinen, f on koko reaalilukuakselilla määritelty jatkuva ja derivoituva funktio. Siten sen ainoat mahdolliset ääriarvokohdat ovat derivaatan nollakohdat. Osamäärän derivointisäännön mukaan

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(12x+6)(x^2+3)-(6x^2+6x+12)(2x)}{(x^2+3)^2} \\ &= \frac{12x^3+6x^2+36x+18-12x^3-12x^2-24x}{(x^2+3)^2} \\ &= \frac{-6x^2+12x+18}{(x^2+3)^2} = -6\cdot\frac{x^2-2x-3}{(x^2+3)^2} \end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned} f'(x)=0 &\Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \\ &\Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot(-3)}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2}=1\pm2 \\ &\Leftrightarrow x=-1 \text{ tai } x=3\,. \end{aligned}$$

Selvitetään ääriarvojen laatu derivaatan merkkikaavion avulla. (Merkin määrittämiseksi eri osaväleillä laske esim. $f'(-10)$, $f'(1)$ ja $f'(10)$.)

		-1		3	
$f'(x)$	$-$	|	$+$	|	$-$
$f(x)$	$\searrow$	|	$\nearrow$	|	$\searrow$

Kaavion perusteella funktiolla f on kohdassa $x=-1$ lokaali minimi $f(-1)=3$ ja kohdassa $x=3$ lokaali maksimi $f(3)=7$.

3. Millä vakion a arvoilla funktiolla

$$f(x)=ax^3+ax^2+x+1$$

ei ole yhtään lokaalia ääriarvoa?

Ratkaisu. Jos $a=0$, niin $f(x)=x+1$ on aidosti kasvava (sen kuvaaja on nouseva suora). Siis ainakaan tapauksessa $a=0$ funktiolla f ei ole lokaaleja ääriarvoja. Muut tapaukset:

Olkoon $a\neq0$. Jotta polynomilla f olisi lokaali ääriarvo, sen derivaatalla

$$f'(x)=3ax^2+2ax+1$$

pitää olla nollakoht(i)a, joissa f' vaihtaa merkkiä. Toisen asteen polynomin f' kuvaaja on paraabeli, joten f' saa erimerkkisiä arvoja ainoastaan siinä tapauksessa, että kuvaajaparaabeli leikkaa x-akselin kahdesti eli vain silloin, kun f':lla on kaksi reaalista nollakohtaa. Koska

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{-2a\pm\sqrt{(2a)^2-4\cdot3a\cdot1}}{2\cdot3a}=-\frac{1}{3}\pm\frac{\sqrt{a^2-3a}}{3a}$$

niin derivaatalla f' on kaksi reaalista nollakohtaa jos ja vain jos

$$a^2-3a=a(a-3)>0\,.$$

Tehtävän ratkaisun muodostavat siis ne a:n arvot, joilla $a(a-3)\leq0$.

Katsotaan lausekkeen $a(a-3)$ merkki. Sen nollakohdat ovat $a=0$ ja $a=3$.

(i) Kun $a < 0$, niin $a - 3 < 0$. Tällöin $a(a-3) > 0$.

(ii) Kun $0 \leq a \leq 3$, niin $a - 3 \leq 0$. Tällöin $a(a-3) \leq 0$.

(iii) Kun $a > 3$, niin $a - 3 > 0$. Tällöin $a(a-3) > 0$.

Vastaus: arvoilla $a \in [0,3]$.

4. Määrää funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ kuvaajan käännepiste (eli kohta, jossa kuvaajan kuperuus muuttaa suuntaa). Miksi kolmannen asteen polynomin kuvaajalla on aina täsmälleen yksi käännepiste?

Ratkaisu. Kuvaajan piste $(x_0, f(x_0))$ on käännepiste täsmälleen silloin, kun f'' vaihtaa merkkiä ohitettaessa kohta x_0 reaaliakselilla. Koska

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1)$$

niin $f''(x) = 3(2x-2) = 6(x-1)$ ja siten $f''(x) < 0$, $f''(x) = 0$ tai $f''(x) > 0$ sen mukaan, onko $x < 1$, $x = 1$ vai $x > 1$. Kuvaajan (ainoa) käännepiste on siis piste

$$(1, f(1)) = (1, 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1) = (1, 2)\,.$$

Yleisesti kolmannen asteen polynomin

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad (a, b, c, d \text{ vakioita ja } a \neq 0)$$

toisella derivaatalla

$$P''(x) = D(3ax^2 + 2bx + c) = 6ax + 2b$$

on tasan yksi nollakohta $x_0 = -\frac{b}{3a}$. Lisäksi P'' vaihtaa merkkiä tässä kohdassa, joten $(x_0, P(x_0))$ on P:n kuvaajan käännepiste ja ainoa sellainen.

5. Missä kohdassa x funktio $f(x) = e^{-x^2/2}$ kasvaa nopeimmin? (Ratkaise siis derivaatan maksimikohta.) Hahmottele funktion f kuvaajaa.

Ratkaisu. Funktio f on kahdesti derivoituva. Derivaatan f' lokaalit ääriarvot löytyvät siten toisen derivaatan f'' nollakohdista. (Huomaa, että derivaatan ääriarvokohdat ovat funktion käännekohtia. Geometrisessa mielessä haetaan siis kuvaajan kohtaa, jossa tangentti nousee jyrkimmin, ja tällaisessa kohdassa kuvaajakäyrän kuperuussuunta vaihtuu.)

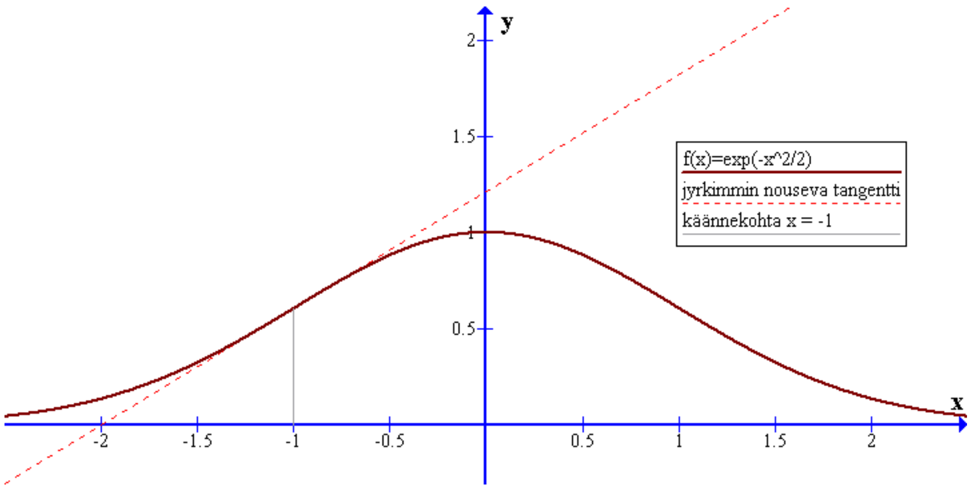
$$\begin{aligned}
f'(x) &= D(e^{-x^2/2}) = e^{-x^2/2} \cdot D(-\tfrac{1}{2}x^2) \\
&= -x\, e^{-x^2/2} \\
f''(x) &= -1 \cdot e^{-x^2/2} - x \cdot D(e^{-x^2/2}) = (-1 - x(-x))\, e^{-x^2/2} \\
&= \big(x^2 - 1\big)\, e^{-x^2/2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f''(x) = 0 \ &\Leftrightarrow\ x^2 - 1 = (x+1)(x-1) = 0 \\
&\Leftrightarrow\ x = -1 \ \text{ tai } \ x = 1\,.
\end{aligned}$$

Merkkikaaviosta

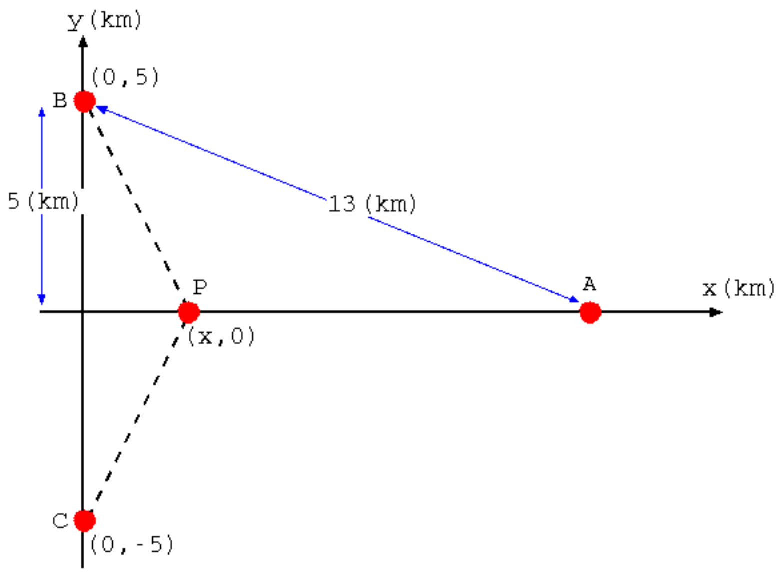
$$\begin{array}{c|c|c|c} & \quad -1 & \quad 1 & \\ f''(x) & + & - & + \\ \hline f'(x) & \nearrow & \searrow & \nearrow \end{array}$$

nähdään, että $f'(x)$ on suurimmillaan kohdassa $x = -1$, kun $x < 1$. Toisaalta $f'(x) = -x\,e^{-x^2/2}$ on negatiivinen, kun $x \geq 1$, joten $f'(-1) = e^{-1/2}$ on suurin derivaatan saama arvo koko reaaliakselilla. Funktio kasvaa siis nopeimmin kohdassa $x = -1$. Kuva:



6. Etäisyys paikasta A paikkoihin B ja C on kumpaankin 13 km. Paikkojen B ja C välimatka on 10 km. Paikat halutaan yhdistää toisiinsa paikasta P alkavilla suorilla tietoliikennekaapeleilla PA, PB ja PC siten, että kaapelit PB ja PC ovat samanpituiset. Määritä tarvittavien kaapelien pienin mahdollinen yhteispituus.

(*Vihje:* jos paikoille B ja C valitaan oheisen kuvan mukaisesti paikkakoordinaatit $(0, \pm 5)$, niin A ja P sijaitsevat x-akselilla. Pisteet (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) yhdistävän janan pituus on $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.)



Ratkaisu. Valitussa koordinaatistossa origo O sijaitsee paikat B ja C yhdistävän janan keskipisteessä. Paikka P tulee sijoittaa paikat O ja A yhdistävälle janalle.

Olkoon paikan P etäisyys origosta x km ja paikan A etäisyys origosta a km. Soveltamalla Pythagoraan lausetta suorakulmaiseen kolmioon OAB saadaan

$$\begin{aligned} a^2 + 5^2 &= 13^2 \\ a^2 &= 13^2 - 5^2 = 144 \\ a &= \sqrt{144} = 12 \end{aligned}$$

Etäisyys paikasta P paikkaan A on siten $12 - x$ km. Haetaan nyt kaapelien yhteispituuden (kilometreissä) ilmoittavan funktion

$$f(x) = |PA| + |PB| + |PC| = 12 - x + 2\sqrt{x^2 + 5^2}$$

pienin arvo, kun $0 \leq x \leq 12$. Funktio f on derivoituva ja

$$f'(x) = -1 + 2 \cdot \tfrac{1}{2}(x^2 + 5^2)^{1/2-1} \cdot D(x^2 + 5^2) = -1 + \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 5^2}}.$$

Kun $x \geq 0$, niin

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \ &\Leftrightarrow \ \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 5^2}} = 1 \\ &\Leftrightarrow \ 2x = \sqrt{x^2 + 5^2} \\ &\Leftrightarrow \ 4x^2 = x^2 + 5^2 \\ &\Leftrightarrow \ 3x^2 = 5^2 \\ &\Leftrightarrow \ x = \frac{5}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Kohta $x = \frac{5}{\sqrt{3}}$ on derivaatan ainoa nollakohta suljetulla välillä $[0, 12]$. Siten f saa tarkasteluvälillä pienimmän arvonsa joko tässä kohdassa tai välin päätepisteessä. Arvot $f(0) = 12 + 2 \cdot 5 = 22$ ja $f(12) = 0 + 2 \cdot 13 = 26$ välin päätepisteissä ovat suurempia kuin

$$\begin{aligned} f(\tfrac{5}{\sqrt{3}}) &= 12 - \tfrac{5}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{5^2/3 + 5^2} = 12 - \tfrac{5}{\sqrt{3}} + 2 \cdot 5\sqrt{\tfrac{1}{3} + 1} \\ &= 12 + 5\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}} + 2\tfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}\right) = 12 + 5 \cdot \tfrac{3}{\sqrt{3}} = 12 + 5\sqrt{3} \\ &\approx 20{,}7 \end{aligned}$$

joten kaapeleita tarvitaan yhteensä vähintään $f(\frac{5}{\sqrt{3}})$ kilometriä eli **n. 20,7 km**.

7. Elintarvikeliike ostaa tuottajalta purkitettua lihasäilykettä hintaan 2,00 euroa/kpl. Liike myy säilykettä normaalisti hintaan 3,50 euroa/kpl. Tällä hinnalla tuotteen menekki on 75 kpl kuukaudessa. Liikkeessä suunnitellaan säilykkeen hinnan alentamista sen menekin kasvattamiseksi. Arvioidaan, että jokaista 10 sentin alennusta kohti tuotteen menekki kasvaa 10 kpl kuukaudessa. Mihin hintaan säilyke pitäisi myydä, jotta liike saisi mahdollisimman suuren myyntivoiton? Anna vastaus 10 sentin tarkkuudella.

Ratkaisu. Jos säilykepurkin hintaa alennetaan x euroa, niin yhden purkin myynnistä saadaan voittoa $3{,}50 - x - 2{,}00 = 1{,}5 - x$ euroa. Menekki kasvaa yhden euron hinnanalennusta kohti 100 kpl/kk, joten x:n euron hinnanalennuksen jälkeen tuotteen menekki on $75 + 100x$ kpl/kk ja myyntivoitto vastaavasti

$$(1{,}5 - x) \cdot (75 + 100x) = 112{,}5 + 75x - 100x^2$$

euroa/kk. Alennus ei voi olla negatiivinen ja toisaalta tuotetta ei kannata myydä tappiolla, joten $0 \leq x \leq 1{,}5$. Koska voiton hinnanalennuksen funktiona ilmoittava kuvaus

$$f(x) = 112{,}5 + 75x - 100x^2$$

on jatkuva ja derivoituva suljetulla välillä $[0,\ 1{,}5]$, niin se on suurimmillaan tällä välillä joko välillä sijaitsevassa derivaatan nollakohdassa tai välin päätepisteessä.

$$f'(x) = 75 - 200x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{75}{200} = 0{,}375$$

ja $0 < 0{,}375 < 1{,}5$, joten $f(x)$ on tarkasteluvälillä on suurimmillaan joko kohdassa $x = 0$, kohdassa $x = 0{,}375$ tai kohdassa $x = 1{,}5$.

x	0	0,375	1,5
$f(x)$	112,5	126,5625 (suurin)	0

Myyntivoiton maksimoiva alennus on siis 0,375 €, mikä on halutulle tarkkuudelle pyöristettynä 40 senttiä.

Vastaus: säilykkeet kannattaa myydä kappalehinnalla 3,50 € − 0,40 € = **3,10** €.