Matematiikan peruskurssi (MATY020)
Harjoitus 8 to 12.3.2009 $\boxed{\textbf{ratkaisut}}$

1. Määritä $\displaystyle\int \sqrt{x}\,(3+5x)\,dx\,,\quad x \geq 0\,.$

Ratkaisu.

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x}\,(3+5x)\,dx &= \int \left(3x^{1/2} + 5x^{5/2}\right) dx\\ &= 3\cdot\tfrac{2}{3}x^{3/2} + 5\cdot\tfrac{2}{5}x^{5/2} + C\\ &= 2x^{3/2} + 2x^{5/2} + C\\ &= 2x(1+x)\sqrt{x} + C\end{aligned}$$

2. Määrää funktion

$$f(x) = \frac{(2x^2-1)^2}{x}$$

se integraalifunktio, jonka kuvaaja kulkee pisteen $(1,0)$ kautta.

Ratkaisu. Kun funktion f lausekkeesta puretaan sulut, niin saadaan summa, jonka jokainen termi on muotoa kx^a (k ja a vakioita). Näihin soveltuu integroimissääntö

$$\int x^a\,dx = \begin{cases}\frac{1}{a+1}x^{a+1} + C & (a \neq -1)\\ \ln|x| + C & (a = -1)\end{cases}$$

Pidä mielessä binomikaava $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$. Sitä soveltaen

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{(2x^2-1)^2}{x} = \left((2x^2)^2 - 2\cdot(2x^2)\cdot 1 + 1^2\right)x^{-1}\\ &= 4x^3 - 4x + x^{-1}\end{aligned}$$

joten haetun integraalifunktion F lauseke on muotoa

$$\begin{aligned}F(x) &= \int f(x)\,dx = 4\cdot\tfrac{1}{4}x^4 - 4\cdot\tfrac{1}{2}x^2 + \ln|x| + C\\ &= x^4 - 2x^2 + \ln|x| + C\,.\end{aligned}$$

Vakio C määräytyy ehdosta $F(1) = 0$. Jotta

$$\begin{aligned}0 &= F(1) = 1^4 - 2\cdot 1^2 + \ln 1 + C = 1 - 2 + 0 + C\\ &= C - 1\end{aligned}$$

on oltava $C = 1$. Kysytty integraalifunktio on siis

$$F(x) = x^4 - 2x^2 + \ln|x| + 1 \quad (x \neq 0)\,.$$

3. Ratkaise

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx\,,\quad x > 0$$

osittaisintegrointia soveltaen (valitse $u = \ln x,\ v' = 1/\sqrt{x}$).

Ratkaisu. Sovelletaan osittaisintegrointikaavaa $\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx$ valinnoin

$$\begin{cases} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} = x^{-1} \\ v' = x^{-1/2} & v = 2\,x^{1/2} \end{cases} :$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx &= \int \ln x \cdot x^{-1/2}\,dx \\
&= \ln x \cdot 2\,x^{1/2} - \int x^{-1} \cdot 2\,x^{1/2}\,dx \\
&= 2\,x^{1/2} \ln x - 2 \int x^{-1/2}\,dx \\
&= 2\,x^{1/2} \ln x - 2 \cdot 2\,x^{1/2} + C \\
&= 2\sqrt{x}\,(\ln x - 2) + C
\end{aligned}$$

4. Määritä

$$\int x^2\, e^x\, dx$$

(osittaisintegroi kahdesti).

Ratkaisu.

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{x^2}_{u}\underbrace{e^x}_{v'}\,dx &= \underbrace{x^2 \cdot e^x}_{u\cdot v}\,dx - \int \underbrace{2x \cdot e^x}_{u'\cdot v}\,dx \\
&= x^2\, e^x - 2 \cdot \int \underbrace{x}_{f}\underbrace{e^x}_{g'}\,dx \\
&= x^2\, e^x - 2\Big(\underbrace{x \cdot e^x}_{f\cdot g} - \int \underbrace{1 \cdot e^x}_{f'\cdot g}\,dx\Big) \\
&= x^2\, e^x - 2\,(x\, e^x - e^x) + C \\
&= \big(x^2 - 2x + 2\big)\, e^x + C
\end{aligned}$$

Tarkistus: $D(x^2 - 2x + 2)\, e^x = (2x - 2)\, e^x + (x^2 - 2x + 2)\, e^x = x^2\, e^x$ ☺

5. Määrää sijoitusta $2x + 5 = t$ käyttäen integraali $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt{2x+5}}\,dx\,, \quad x > -\tfrac{5}{2}\,.$

Ratkaisu. Muuttujien x ja t suhde:

$$\begin{aligned}
2x + 5 &= t \\
2x &= t - 5 \\
x &= (t-5)/2
\end{aligned}$$

joten $\displaystyle \frac{x}{\sqrt{2x+5}} = \frac{t-5}{2\,t^{1/2}}\,.$

"Differentiaalien" dx ja dt suhde:

$$\begin{aligned}
2x + 5 &= t && \text{[derivoidaan alkup. muuttujan } x \text{ suhteen]} \\
2 &= \frac{dt}{dx} && \text{[kerrotaan puolittain differentiaalilla } dx\text{]} \\
2\,dx &= dt
\end{aligned}$$

Näin ollen

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x}{\sqrt{2x+5}}\,dx &= \frac{3}{2}\int \frac{x}{\sqrt{2x+5}}\cdot 2\,dx \\
&= \frac{3}{2}\int \frac{t-5}{2\,t^{1/2}}\,dt = \frac{3}{4}\int \left(t^{1/2} - 5\,t^{-1/2}\right) dt \\
&= \frac{3}{4}\int t^{1/2}\,dt - \frac{15}{4}\int t^{-1/2}\,dt \\
&= \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{2}{3}\,t^{3/2} - \tfrac{15}{4}\cdot 2\,t^{1/2} + C = \tfrac{1}{2}\left(t^{3/2} - 15\,t^{1/2}\right) + C \\
&= \tfrac{1}{2}(t-15)\sqrt{t} + C \\
&= \tfrac{1}{2}\left((2x+5)-15\right)\sqrt{2x+5} + C \\
&= (x-5)\sqrt{2x+5} + C\,.
\end{aligned}$$

6. Laske määrätty integraali

$$\int_{-1}^{1} \frac{2x}{1+x^2}\,dx\,.$$

Ratkaisu. Integroitava funktio on muotoa $\frac{f'(x)}{f(x)}$, missä $f(x) = 1 + x^2$. Yleisesti

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

joten

$$\int_{-1}^{1} \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \Big/_{\!-1}^{\,1} \ln|1+x^2| = \ln(1+(-1)^2) - \ln(1+1^2) = 0\,.$$

7. Laske määrätty integraali

$$\int_{1}^{3} \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$$

sijoitusta $\ln x = t$ käyttäen.

Ratkaisu. Kun $t = \ln x$, niin $\frac{dt}{dx} = x^{-1}$, joten muuttujanvaihdossa lauseke $x^{-1}\,dx$ korvataan dt:llä.

Ratkaisutapa 1: Sijoitus $\ln x = t$ määräämättömään integraaliin $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$ antaa

$$\begin{aligned}
\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx = \int (\ln x)^2 \cdot x^{-1}\,dx = \int t^2\,dt = \frac{t^3}{3} + C \\
= \frac{(\ln x)^3}{3} + C
\end{aligned}$$

joten

$$\int_{1}^{3} \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx = \Big/_{\!1}^{\,3} \frac{(\ln x)^3}{3} = \frac{(\ln 3)^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{(\ln 3)^3}{3}\,.$$

Ratkaisutapa 2: käytetään sijoitusta $\ln x = t$ suoraan määrättyyn integraaliin. Nyt pitää muistaa vaihtaa integroimisrajatkin vastaamaan uutta muuttujaa.

$$\begin{aligned}
\int_1^3 \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx &= \int_1^3 (\ln x)^2 \cdot x^{-1}\,dx \qquad\qquad [\text{sij. } t = \ln x,\ dt = x^{-1}\,dx] \\
&= \int_{\ln 1}^{\ln 3} t^2\,dt = \Big/_{\!\!0}^{\ln 3} \frac{t^3}{3} \\
&= \frac{(\ln 3)^3}{3} \approx 0{,}442\,.
\end{aligned}$$

8. Laske määrätty integraali

$$\int_0^1 \frac{x}{e^x}\,dx$$

osittaisintegrointia soveltaen (muokkaa integroitava lauseke tuloksi, jonka toinen tekijä on e^{-x}).

Ratkaisu. Soveltamalla määrätyn integraalin osittaisintegrointikaavaa

$$\int_a^b uv'\,dx = \Big/_{\!\!a}^{b} uv - \int_a^b u'v\,dx$$

valinnoin

$$\begin{cases} u = x & u' = 1 \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{cases}$$

saadaan

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x}{e^x}\,dx &= \int_0^1 x \cdot e^{-x}\,dx = \Big/_{\!\!0}^{1} x \cdot (-e^{-x}) - \int_0^1 1 \cdot (-e^{-x})\,dx \\
&= -e^{-1} - 0 - \Big/_{\!\!0}^{1} e^{-x} = -e^{-1} - (e^{-1} - e^0) \\
&= e^0 - 2\,e^{-1} = 1 - \frac{2}{e} \approx 0{,}264\,.
\end{aligned}$$