Matematiikan peruskurssi (MATY020)
Harjoitus 9 to 19.3.2008 $\boxed{\textbf{ratkaisut}}$

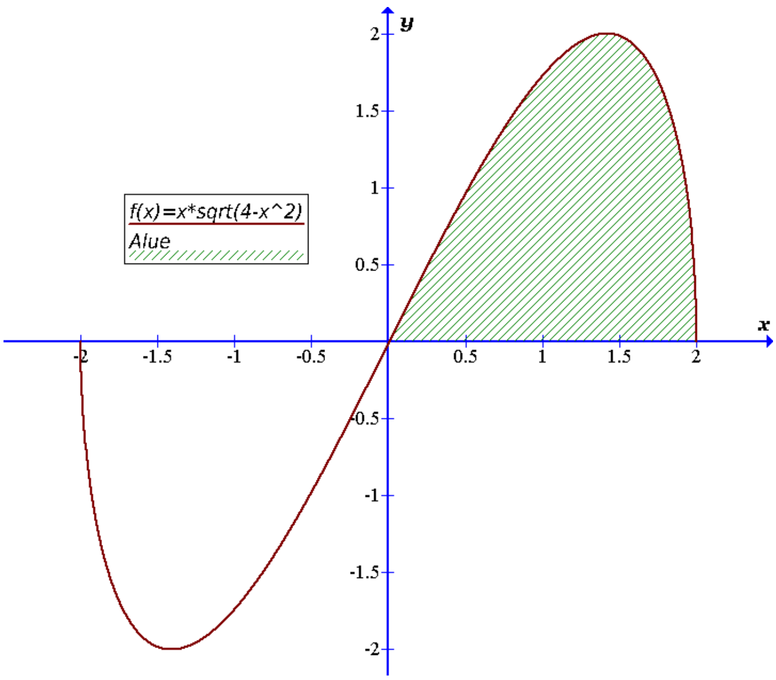
1. Määrää sen alueen pinta-ala, jonka rajaa ylhäältä käyrä $y = x\sqrt{4-x^2}$ ja alhaalta x-akseli. Piirrä kuva. (*Vihje:* sijoitus $t = 4 - x^2$.)

Ratkaisu. Haetaan x-akselin ja käyrän $y = x\sqrt{4-x^2}$ leikkauskohdat:

$$\begin{aligned} x\sqrt{4-x^2} &= 0 \\ x = 0 \ \text{ tai } \ 4-x^2 &= 0 \\ x = 0 \ \text{ tai } \ x &= \pm 2\,. \end{aligned}$$

Lauseke $x\sqrt{4-x^2}$ on negatiivinen, kun $-2 < x < 0$ ja positiivinen, kun $0 < x < 2$. Tutkittavan alueen pinta-ala on siten

$$A = \int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx\,.$$



Integrointiin voi käyttää annettua vihjettä tai havaintoa, että

$$x\sqrt{4-x^2} = -\tfrac{1}{2}f(x)^{1/2}f'(x)$$

missä $f(x) = 4 - x^2$ (ja $f'(x) = -2x$). Koska

$$\int x^{1/2}\,dx = \tfrac{2}{3}x^{3/2} + C \ \Rightarrow \ \int f(x)^{1/2}f'(x)\,dx = \tfrac{2}{3}f(x)^{3/2} + C$$

niin

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{4-x^2}\,dx &= -\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}(4-x^2)^{3/2} + C \\ &= -\tfrac{1}{3}(4-x^2)\sqrt{4-x^2} + C \end{aligned}$$

ja siten

$$A = \int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}\Big/_{\!0}^{\!2}(4-x^2)\sqrt{4-x^2}$$
$$= -\frac{1}{3}\Big((4-2^2)\sqrt{4-2^2} - (4-0^2)\sqrt{4-0^2}\Big)$$
$$= -\frac{1}{3}(0-4\cdot 2) = \frac{8}{3}\,.$$

2. Paraabeli $y = 4x - x^2$ ja x-akseli rajaavat alueen, jonka suora $y = x$ jakaa kahteen osaan. Osoita laskemalla, että näiden osien pinta-alojen suhde on $27 : 37$. Piirrä kuva.

Ratkaisu. $4x - x^2 = x(4-x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$ tai $x = 4$. Paraabeli $y = 4x - x^2$ on x-akselin yläpuolella, kun (ja vain silloin kun) $0 \le x \le 4$, joten x-akselin ja paraabelin rajoittaman alueen pinta-ala on

$$A = \int_0^4 (4x - x^2)\,dx = \Big/_{\!0}^{\!4}(2x^2 - \tfrac{1}{3}x^3) = 32 - \frac{64}{3} = \frac{64}{6}\,.$$

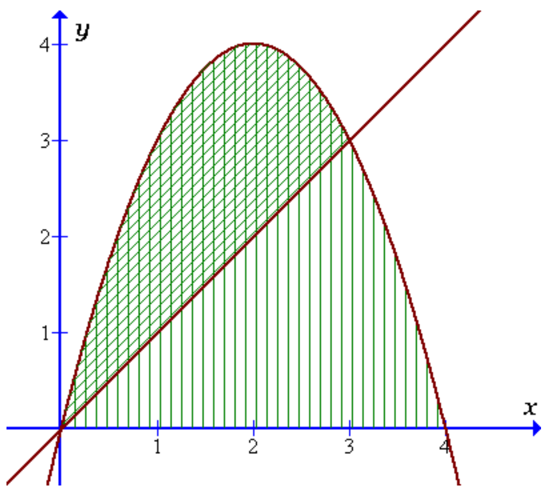
Määrätään seuraavaksi ne x:n arvot väliltä $[0,4]$, joilla paraabeli $y = 4x - x^2$ on suoran $y = x$ yläpuolella. Kun $x \ge 0$, niin

$$4x - x^2 \ge x \;\Leftrightarrow\; x\,(3-x) \ge 0 \;\Leftrightarrow\; 0 \le x \le 3.$$

Siten suora $y = x$ jakaa paraabelin ja x-akselin rajoittaman alueen kahteen osaan, joista ylemmän pinta-ala on

$$\int_0^3 ((4x-x^2)-x)\,dx = \int_0^3 (3x - x^2)\,dx = \Big/_{\!0}^{\!3}\left(\tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right) = \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right)\cdot 27 = \frac{27}{6}\,.$$

Alemman osan pinta-alan on oltava $A - \dfrac{27}{6} = \dfrac{37}{6}$, joten osien pinta-alojen suhde on $27 : 37$ (ylempi osa pienempi).



3. Määritellään funktio $f\colon A \to \mathbb{R}$ kaavalla

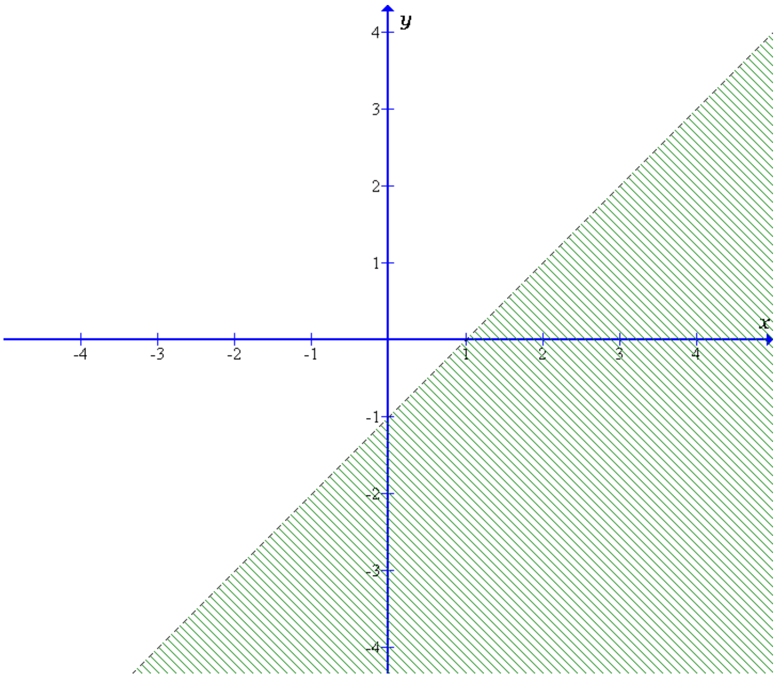
$$f(x,y) = \ln(x-y-1)\,.$$

Funktion määrittelyjoukko A on laajin mahdollinen tason $\mathbb{R}^2$ osajoukko, jossa funktion lauseke on määritelty. Määrää joukko A (piirrä kuva) sekä laske funktion arvot $f(-3,-5)$, $f(2e, e-1)$ ja $f(4e^3+5, 3e^3+4)$.

Ratkaisu. Luonnollinen logaritmi on määritelty positiivisille luvuille. Tämän perusteella funktion f määrittelyjoukon A muodostavat ne pisteparit (x,y), joissa $x-y-1>0$ eli $y<x-1$; joukko-opillisin merkinnöin

$$A = \mathcal{M}_f = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x-1 \,\}\,.$$

Geometrisessa mielessä A on suoran $y = x-1$ alle jäävä avoin puolitaso.[1]



Kysytyt arvot:

$$\begin{aligned} f(-3,-5) &= \ln(-3-(-5)-1) = \ln 1 = 0 \\ f(2e, e-1) &= \ln(2e-(e-1)-1) = \ln e = 1 \\ f(4e^3+5, 3e^3+4) &= \ln(4e^3+5-3e^3-4-1) = \ln(e^3) = 3\,. \end{aligned}$$

Tehtävien 4–6 ratkaisut puuttuvat; ne eivät ole tenttiin valmistautumisen kannalta oleellisia.

4. Hahmottele seuraavien funktioiden tasa-arvokäyriä (vähintään 3 tasa-arvokäyrää kullekin funktiolle):

(a) $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2$ (b) $g(x,y) = x+y$ (c) $h(x,y) = xy$

[1]Puolitason avoimuus merkitsee tässä sitä, että reunasuora $y = x-1$ ei sisälly kyseiseen puolitasoon (mistä syystä tämä suora on piirretty joukkoa A havainnollistavaan kuvaan katkoviivoin).

5. Piirrä xy-tasoon funktion
$$f(x,y) = \frac{y+x}{y-x}$$
tasa-arvokäyrät $f(x,y) = c$ vakion c arvoilla -1, 0, 1 ja 2.

6. Piirrä xy-tasoon funktion
$$f(x,y) = x^2 + y$$
tasa-arvokäyrät $f(x,y) = c$ vakion c arvoilla -1, 0, 1 ja 2.

7. Määrää ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat $f_x(x,y)$ ja $f_y(x,y)$, kun

$$\text{(a)}\ \ f(x,y) = 4x^4 + 4x^2y^3 - y \qquad \text{(b)}\ \ f(x,y) = e^{2x+3y}$$

Ratkaisu. (a) $f_x(x,y) = 16x^3 + 8xy^3,\ \ f_y(x,y) = 12x^2y^2 - 1\,;$
(b) $f_x(x,y) = 2\,e^{2x+3y},\ \ f_y(x,y) = 3\,e^{2x+3y}.$

8. Määrää ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat seuraaville funktioille:

$$\text{(a)}\ \ f(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2} \qquad \text{(b)}\ \ g(x,y) = \frac{y}{x-y}$$

Ratkaisu. (a) $D\sqrt{x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ ja $\begin{cases}(25 - x^2 - y^2)_x = -2x \\ (25 - x^2 - y^2)_y = -2y\end{cases}$ joten

$$f_x(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{25 - x^2 - y^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}$$
$$f_y(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{25 - x^2 - y^2}} \cdot (-2y) = -\frac{y}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}$$

(b) Koska $(x-y)_x = 1\,,\ \ (x-y)_y = -1$ ja $Dx^{-1} = \dfrac{-1}{x^2}$, niin

$$g_x(x,y) = y \cdot ((x-y)^{-1})_x = y \cdot \frac{-1}{(x-y)^2} \cdot (x-y)_x = \frac{-y}{(x-y)^2}$$
$$g_y(x,y) = \frac{1 \cdot (x-y) - y \cdot (x-y)_y}{(x-y)^2} = \frac{(x-y)+y}{(x-y)^2} = \frac{x}{(x-y)^2}$$

(osittaisderivaatan g_y määräämiseen käytettiin osamäärän derivointisääntöä muuttujan y suhteen).

9. Määrää funktion
$$f(x,y) = xy^2 - \frac{y}{x}$$
x-akselin ja y-akselin suuntaiset kasvunopeudet kohdassa $(x,y) = (2,-1)$

Ratkaisu. $f_x(x,y) = y^2 + \frac{y}{x^2}$ ja $f_y(x,y) = 2xy - \frac{1}{x}$, kun $x \neq 0$, joten x-akselin suuntainen kasvunopeus pisteessä $(2,-1)$ on

$$f_x(2,-1) = (-1)^2 + \frac{-1}{2^2} = \tfrac{3}{4}$$

ja y-akselin suuntainen kasvunopeus pisteessä $(2,-1)$ on

$$f_y(2,-1) = 2 \cdot 2 \cdot (-1) - \frac{1}{2} = -4\tfrac{1}{2}\,.$$