Ääriarvon laatu

Jatkuvasti derivoituvan funktion f lokaali ääriarvokohta (x_0, y_0) on aina kriittinen piste (ts. $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$, kun $x = x_0$ ja $y = y_0$), mutta kriittinen piste ei ole aina ääriarvokohta. Esimerkiksi origo $(0, 0)$ on funktion

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

kriittinen piste, sillä $f_x(x, y) = 2x = 0$ ja $f_y(x, y) = -2y = 0$, kun $x = y = 0$. Arvo $f(0, 0) = 0$ ei kuitenkaan ole tämän funktion suurin eikä pienin arvo yhdessäkään origon ympäristössä, sillä

$$f(0, t) = -t^2 < 0 < t^2 = f(t, 0) \text{ kaikilla } t \neq 0.$$

Kriittinen piste $(0, 0)$ ei siis tässä tapauksessa ole lokaali ääriarvokohta. Esimerkkinä käytetyn funktion $f(x, y) = x^2 - y^2$ kuvaaja muistuttaa origon lähellä satulaa. Kriittistä pistettä, joka ei ole lokaali ääriarvokohta, kutsutaankin *satulapisteeksi*.

Kahden muuttujan funktion kriittisen pisteen laatua voi tutkia toisen kertaluvun osittaisderivaattojen avulla.

9.6.2 Lause. Olkoon (x_0, y_0) jatkuvasti derivoituvan funktion f kriittinen piste, ts.

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0\,.$$

Oletetaan lisäksi, että funktiolla f on tässä kohdassa jatkuvat toisen kertaluvun osittaisderivaatat. Merkitään

$$D(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}(x_0, y_0)^2$$

(muista sekaderivaattojen yhtäsuuruus). Tällöin

(i) jos $D(x_0, y_0) > 0$ ja $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, niin $f(x_0, y_0)$ on lokaali maksimi.

(ii) jos $D(x_0, y_0) > 0$ ja $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, niin $f(x_0, y_0)$ on lokaali minimi.

(iii) jos $D(x_0, y_0) < 0$, niin (x_0, y_0) on satulapiste.

Jos $D(x_0, y_0) = 0$, kriittisen pisteen (x_0, y_0) laadun selvittäminen vaatii lisätarkasteluja.

(Tuloksen perustelu sivuutetaan. Lause 9.6.2 yleistää aiemmin esitetyn yhden muuttujan funktion derivaatan nollakohdissa käytettävän toisen derivaatan testin.)

Tilanteessa $D(x_0, y_0) = 0$ kriittinen piste (x_0, y_0) voi olla mitä laatua tahansa. Tarkastellaan yksinkertaisina esimerkkeinä funktioita $f(x, y) = x^3 + y^3$, $g(x, y) = x^4 + y^4$ ja $h(x, y) = -x^4 - y^4$. On helppo laskea, että näistä jokaiselle $(x_0, y_0) = (0, 0)$ on kriittinen piste, jossa $D(x_0, y_0) = 0$. Funktiolle f origo on satulapiste, koska $f(0, 0) = 0$ ei ole f:n lokaali ääriarvo edes x-akselilla. Funktio g puolestaan saavuttaa origossa jopa globaalin miniminsä $g(0, 0) = 0$ ja vastaavasti $h(0, 0) = 0$ on funktion h lokaali ja globaali maksimi. Tässä globaali minimi (vast. maksimi) tarkoittaa funktion arvojoukon pienintä (vast. suurinta) lukua.

9.6.3 Esimerkki. Määrää funktion

$$f(x,y) = x^2y + y^2x - 3xy$$

lokaalit ääriarvot.

Ratkaisu. Koska f on jatkuvasti derivoituva koko tasossa, sen ainoat mahdolliset ääriarvokohdat ovat sen kriittiset pisteet. Funktion f osittaisderivaatat ovat

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2xy + y^2 - 3y = y\,(2x + y - 3)\,, \\ f_y(x,y) &= x^2 + 2yx - 3x = x\,(x + 2y - 3)\,. \end{aligned}$$

Kriittisissä pisteissä (x,y) on voimassa $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$. Nyt

$$\begin{aligned} f_x(x,y) = 0 &\Leftrightarrow y = 0 \;\text{ tai }\; 2x + y = 3 \\ f_y(x,y) = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \;\text{ tai }\; x + 2y = 3 \end{aligned}$$

joten yhtälöt $f_x(x,y) = 0$ ja $f_y(x,y) = 0$ ovat samanaikaisesti voimassa seuraavassa neljässä tapauksessa:

$$\text{(a)} \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{(b)} \begin{cases} y = 0 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \quad \text{(c)} \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{(d)} \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

Yhtälöparin (d) ratkaisu $x = y = 1$ löydetään vaikkapa Gaussin ja Jordanin menetelmällä. Kriittisiksi pisteiksi saadaan

$$\text{(a) } P_0 = (0,0) \quad \text{(b) } P_1 = (3,0) \quad \text{(c) } P_2 = (0,3) \quad \text{(d) } P_3 = (1,1).$$

Tutkitaan vielä näiden laatu. Toisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}(2xy + y^2 - 3y) = 2y\,, \\ f_{xy}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}(2xy + y^2 - 3y) = 2x + 2y - 3 \;\text{ ja} \\ f_{yy}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 2yx - 3x) = 2x\,, \end{aligned}$$

joten

(a) $D(0,0) = f_{xx}(0,0) \cdot f_{yy}(0,0) - f_{xy}(0,0)^2 = 0 \cdot 0 - (-3)^2 = -9 < 0\,,$

(b) $D(3,0) = f_{xx}(3,0) \cdot f_{yy}(3,0) - f_{xy}(3,0)^2 = 0 \cdot 6 - 3^2 = -9 < 0\,,$

(c) $D(0,3) = f_{xx}(0,3) \cdot f_{yy}(0,3) - f_{xy}(0,3)^2 = 6 \cdot 0 - 3^2 = -9 < 0\,.$

Pisteet P_0, P_1 ja P_2 ovat siis satulapisteitä.

(d) $D(1,1) = f_{xx}(1,1) \cdot f_{yy}(1,1) - f_{xy}(1,1)^2 = 2 \cdot 2 - 1^2 = 3 > 0$
ja $f_{xx}(1,1) = 2 > 0$,

joten $P_3 = (1,1)$ on lokaali minimipiste ja

$$f(1,1) = 1^2 \cdot 1 + 1^2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 1 = -1$$

on funktion f lokaali minimi.

Vastaus: Funktion f ainoa ääriarvo on lokaali minimi $f(1,1) = -1$.

9.6.4 Esimerkki. Liike myy kahta kilpailevaa viinilaatua. Kalifornialainen viini maksaa kauppiaalle 6 euroa/pullo ja ranskalainen 8 euroa/pullo. Kauppias arvioi, että jos kalifornialaisen viinipullon hinta on x euroa ja ranskalaisen y euroa, niin kalifornialaisen viinin menekki on $70 - 25x + 20y$ pulloa päivässä ja ranskalaisen viinin menekki $80 + 30x - 35y$ pulloa/päivä. Kuinka kauppiaan olisi hinnoiteltava eri viinilaadut, jotta hän saisi mahdollisimman suuren voiton?

Ratkaisu. Viinien myynnistä saadun voiton (euroa/päivä) ilmoittaa funktio

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (x-6)\,(70-25x+20y) + (y-8)\,(80+30x-35y) \\ &= 5\cdot((x-6)(14-5x+4y) + (y-8)(16+6x-7y)) \\ &= 5\cdot(-5x^2+10xy-4x-7y^2+48y-212) \end{aligned}$$

Tämän funktion ainoat mahdolliset ääriarvokohdat ovat kriittiset pisteet. Koska

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 5\cdot(-10x+10y-4) = 10\cdot(-5x+5y-2) \\ f_y(x,y) = \ 5\cdot(10x-14y+48) = 10\cdot(5x-7y+24)\,, \end{cases}$$

kriittisen pisteen (x,y) koordinaatit määräytyvät yhtälöparista

$$\begin{cases} -5x+5y-2=0 \\ \ \ 5x-7y+24=0\,. \end{cases}$$

Laskemalla yhtälöparin yhtälöt puolittain yhteen saadaan $-2y+22=0$, joten yhtälöparin ratkaisussa $y=11$. Kun sijoitetaan tulos yhtälöparin ensimmäiseen yhtälöön, saadaan

$$-5x+55-2=0$$

eli $x=\frac{53}{5}=10\frac{3}{5}$. Ainoa kriittinen piste on siten $(10\frac{3}{5},11)$. Selvitetään vielä ääriarvon laatu toisen kertaluvun osittaisderivaattojen avulla. Tälle funktiolle

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= -50 \\ f_{yy}(x,y) &= -70 \\ f_{xy}(x,y) &= 50 \end{aligned}$$

kaikilla (x,y), joten

$$D(10\tfrac{3}{5},11) = \begin{vmatrix} -50 & 50 \\ 50 & -70 \end{vmatrix} = -50\cdot(-70) - 50^2 = 3500-2500 = 1000\,.$$

Koska $D(10\frac{3}{5},11) > 0$ ja $f_{xx}(10\frac{3}{5},11) < 0$, funktiolla f on kohdassa $(10\frac{3}{5},11)$ lokaali maksimi.

Vastaus: Kauppiaan saama voitto on suurin, kun kalifornialaisen viinin hinta on 10,60 euroa/pullo ja ranskalaisen viinin hinta on 11 euroa/pullo.

Huom. Esimerkin 9.6.4 kaltaisissa soveltavissa tehtävissä on lupa olettaa, että optimoitavan funktion lokaali ääriarvo (tai ääriarvokohta) on haettu ratkaisu, jos ääriarvokohtia on vain yksi ja se on oikeaa tyyppiä. (Voidaan ajatella, että alunperinkin ratkaisua haettiin vain lokaalin ääriarvokohdan jossakin sopivan pienessä ympäristössä, vaikka tätä ympäristöä ei etukäteen spesifioitu. Joka tapauksessa aina saa olettaa, että tehtävä on mielekkäästi asetettu. Esim. jos pyydetään maksimoimaan, niin maksimin olemassaoloa ei tarvitse kyseenalaistaa).

On kuitenkin mahdollista, että kahden muuttujan funktiolla on yksikäsitteinen lokaali maksimi (tai minimi) muttei varsinaista suurinta (tai pienintä) arvoa. Esimerkiksi funktion

$$f(x, y) = x^2 y + y^2 x - 3xy$$

ainoa lokaali ääriarvo on lokaali minimi $f(1, 1) = -1$ (osoitettiin esimerkissä 9.6.3), mutta se saa pienempiäkin arvoja, kuten $f(-1, -1) = -5$.

Seuraava tulos riittää takaamaan, että esimerkissä 9.6.4 löydetty lokaali maksimi on myös globaali maksimi, sillä tehtävän funktiolle $f(x, y)$ on voimassa $D(x, y) = 1000 > 0$ kaikissa pisteissä (x, y).

9.6.5 Lause. Olkoon funktiolla $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jatkuvat ensimmäisen ja toisen kertaluvun osittaisderivaatat ja olkoon (x_0, y_0) funktion f kriittinen piste. Jos $D(x, y) > 0$ *jokaisessa* tason pisteessä (x, y), niin $f(x_0, y_0)$ on funktion f suurin tai pienin arvo. Lisäksi (x_0, y_0) on funktion f ainoa ääriarvokohta.

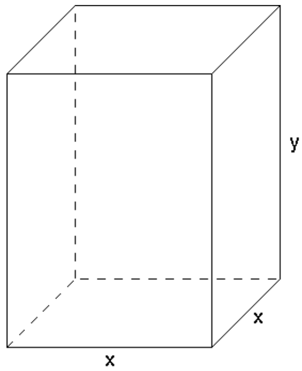
9.7. Sidotut ääriarvot

Monissa käytännön optimointitehtävissä kahden muuttujan funktion muuttujia sitoo jokin ehto. Esimerkiksi toimittaja, jonka on pysyttävä kiinteässä 60 000 euron budjetissa, joutuu miettimään, kuinka jakaa varat uuden kirjan kehittämisen ja mainonnan kesken kirjan myynnin maksimoimiseksi. Jos $f(x, y)$ on kirjan myyntivolyymia ennustava funktio siten, että x on kirjan kehitykseen käytettävät varat ja y mainontaan kulutettava summa (ja rahayksiköksi on kiinnitetty euro), niin tehtävänä on etsiä funktion f suurin arvo, kun muuttujia x ja y sitoo ehto $x + y = 60\,000$. Tällaista ääriarvotehtävää kutsutaan **sidotuksi ääriarvotehtäväksi**.

Sijoitusmenetelmä

Sidotun ääriarvotehtävän voi joskus muuntaa yhden muuttujan ääriarvotehtäväksi. Olkoon $g(x, y) = 0$ muuttujia x ja y sitova yhtälö. Jos yhtälö voidaan ratkaista jomman kumman muuttujan suhteen (eli se saadaan muotoon $y = y(x)$ tai $x = x(y)$), niin sijoittamalla tämä ratkaistu muoto ko. muuttujan paikalle minimoitavaan tai maksimoitavaan funktioon $f(x, y)$ saadaan yhden muuttujan funktio $x \mapsto f(x, y(x))$ tai $y \mapsto f(x(y), y)$ ja tehtävä palautuu tavalliseksi yhden muuttujan ääriarvo-ongelmaksi. [Edellä pohditussa esimerkkitilanteessa voidaan hakea maksimia funktiolle $u(x) = f(x, 60\,000 - x)$ tai funktiolle $v(y) = f(60\,000 - y, y)$.]

9.7.1 Esimerkki. Tehtaasssa ryhdytään valmistamaan suorakulmaisen särmiön muotoisia kannettomia astioita, joiden tilavuus on 0,50 dm^3. Astian neliönmuotoisen pohjan materiaali maksaa 0,10 eur/dm^2. Sivutahkojen materiaalin hinta on 0,05 eur/dm^2. Laske, mitkä ovat astian mitat, kun sen materiaalikustannukset ovat mahdollisimman pienet.



Ratkaisu. Merkitään pohjan leveyttä x:llä ja astian korkeutta y:llä (ks. kuva). Astian pohjan pinta-ala on x^2 ja neljän sivutahkon yhteispinta-ala $4xy$. Astian materiaalikustannukset ovat siten

$$K(x, y) = 0{,}1 \cdot x^2 + 0{,}05 \cdot 4xy = 0{,}1 \cdot x^2 + 0{,}2 \cdot xy$$

euroa, kun pituudet x ja y annetaan desimetreinä.

Tilavuusehto määrää muuttujille x ja y riippuvuussuhteen

$$V = x^2 y = 0{,}50\,.$$

Ehto saadaan muotoon $y = \frac{1}{2}x^{-2}$, joten ongelma redusoituu yhden muuttujan funktion

$$h(x) = K(x, \tfrac{1}{2}x^{-2}) = 0{,}1 \cdot x^2 + 0{,}2 \cdot x \cdot \tfrac{1}{2}x^{-2} = 0{,}1 \cdot (x^2 + x^{-1}), \quad x > 0$$

minimikohdan x_0 hakemiseen.

Minimoitava funktio $h\colon \left]0, \infty\right[\to \mathbb{R}$ on derivoituva, joten se voi saada pienimmän arvonsa ainoastaan derivaatan nollakohdassa. Koska

$$h'(x) = 0{,}2 \cdot x - 0{,}1 \cdot x^{-2} = \frac{2x^3 - 1}{10x^2}\,,$$

niin $h'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x^3 = 1 \;\Leftrightarrow\; x = \sqrt[3]{0{,}5}$. Lisäksi h' on derivoituva ja

$$h''(x) = 0{,}2 - 0{,}1 \cdot (-2x^{-3}) = 0{,}2 \cdot \left(1 + x^{-3}\right) > 0$$

kun $x > 0$. Erityisesti $h''(\sqrt[3]{0{,}5}) > 0$, joten funktiolla h on derivaattansa nollakohdassa $x_0 = \sqrt[3]{0{,}5}$ lokaali minimi. Toisaalta x_0 on funktion h ainoa ääriarvokohta, joten h saa pienimmän arvonsa kohdassa $x_0 \approx 0{,}79$.[1] Vastaava y:n arvo on

$$y_0 = \tfrac{1}{2}x_0^{-2} = 0{,}5 \cdot (\sqrt[3]{0{,}5})^{-2} = 0{,}5^{1-2/3} = \sqrt[3]{0{,}5} = x_0\,.$$

Vastaus: Materiaalikustannukset ovat mahdollisimman pienet, kun astia on (kanneton) kuutio, jonka sivu on n. 7,9 cm (= 0,79 dm).

[1] Muista: jos jatkuvalla **yhden muuttujan funktiolla** on vain yksi lokaali ääriarvo (esim. sillä on tasan yksi lokaali minimi eikä yhtään lokaalia maksimia), niin tämä lokaali ääriarvo on itse asiassa globaali ääriarvo. **Kahden muuttujan funktioilla ei ole vastaavaa ominaisuutta.**

Lagrangen menetelmä

Sijoituskeino (eli toisen muuttujan eliminointi) sopii yksinkertaisiin tapauksiin, joissa rajoite eli **side-ehto** $g(x, y) = 0$ on ratkaistavissa eksplisiittisesti toisen muuttujan suhteen. Seuraavaksi esiteltävä *Lagrangen menetelmä* soveltuu kaikkien sidottujen ääriarvotehtävien ratkaisuun.

Olkoot $f(x, y)$ ja $g(x, y)$ jatkuvasti derivoituvia. Kun funktiolle f etsitään suurinta tai pienintä arvoa side-ehdon $g(x, y) = 0$ rajoittamassa f:n määrittelyjoukon osassa, niin kolmen muuttujan funktiota

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot g(x, y)$$

kutsutaan sidotun ääriarvotehtävän **Lagrangen funktioksi**. (Kreikkalainen kirjain λ luetaan ”lambda”.) Lagrangen menetelmä perustuu seuraavaan havaintoon:

9.7.2 Lause. Olkoon (x_0, y_0) on sidotun ääriarvotehtävän ratkaisukohta olematta kuitenkaan side-ehtofunktion g kriittinen piste. Tällöin on olemassa vakio λ_0 (pisteeseen (x_0, y_0) liittyvä *Lagrangen kerroin*) siten, että

(1)
$$\begin{cases} F_x(x, y, \lambda) = 0 \\ F_y(x, y, \lambda) = 0 \\ F_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \end{cases}$$

kun $x = x_0$, $y = y_0$ ja $\lambda = \lambda_0$.

Yhtälöryhmän (1) toteuttavia lukukolmikoita (x, y, λ) kutsutaan Lagrangen funktion *kriittisiksi pisteiksi.*

Mahdolliset sidotut ääriarvokohdat saadaan siis selville ratkaisemalla Lagrangen funktion kriittiset pisteet sekä ne side-ehtofunktion g kriittiset pisteet, jotka toteuttavat side-ehdon. (Jos side-ehtoyhtälö on asetettu järkevästi, niin mainitunlaisia g:n kriittisiä pisteitä ei yleensä ole.)

Huomioita. 1) $F_\lambda(x, y, \lambda) = g(x, y)$, joten yhtälöryhmän (1) viimeinen yhtälö yksinkertaisesti antaa side-ehdon $g(x, y) = 0$.
2) Kun side-ehto on voimassa, niin

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot 0 = f(x, y)\,.$$

3) Koska Lagrangen kertoimen λ arvolla ei ole merkitystä, yhtälöryhmän (1) ratkaisussa ensimmäiseksi vaiheeksi kannattaa yleensä valita λ:n eliminointi.

Lagrangen menetelmää käytettäessä pitäisi tietää etukäteen, että haettu sidottu ääriarvo on olemassa. Menetelmään tosin liittyy testi, jolla voi tutkia Lagrangen funktion kriittisten pisteiden laatua, mutta tämä testi on teknisyydessään turhan hankala tässä esitettäväksi.

9.7.2 Esimerkki. Määrää funktion

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

pienin arvo, kun muuttujia x ja y sitoo ehto $2x - y = 4$.

Ratkaisu. Perustellaan ensin pienimmän arvon olemassaolo. Ehto $2x - y = 4$ määrää xy-tason suoran, joka kulkee pisteiden $(0, -4)$ ja $(2, 0)$ kautta. Alkeisgeometriasta tiedetään, että tällä suoralla on piste (x_0, y_0), jonka etäisyys origoon $(0, 0)$ on pienempi kuin muilla suoran pisteillä. Funktio $f(x, y) = x^2 + y^2$ ilmoittaa origon ja pisteen (x, y) välisen etäisyyden neliön, joten $f(x_0, y_0)$ on funktion f pienin arvo suoralla $2x - y = 4$.

Haetaan nyt minimikohta (x_0, y_0) Lagrangen menetelmällä. Kirjoitetaan aluksi sideehto $2x - y = 4$ muotoon

$$g(x, y) = 2x - y - 4 = 0\,.$$

Koska $g_x(x, y) = 2 \neq 0$ kaikkialla, funktiolla g ei ole kriittisiä pisteitä. Haettu sidottu minimikohta (x_0, y_0) saadaan siten Lagrangen funktion

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\, g(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda\,(2x - y - 4)$$

kriittisestä pisteestä (x_0, y_0, λ_0).

Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$F_x(x, y, \lambda) = 2x + 2\lambda = 0 \tag{2}$$

$$F_y(x, y, \lambda) = 2y - \lambda = 0 \tag{3}$$

$$F_\lambda(x, y, \lambda) = 2x - y - 4 = 0\,. \tag{4}$$

Yhtälöistä (2) ja (3) seuraa $\begin{cases} \lambda = -x \\ \lambda = 2y \end{cases}$ joten ratkaisussa (x, y, λ) on oltava $-x = 2y$ eli $x = -2y$. Sijoitetaan tämä yhtälöön (4):

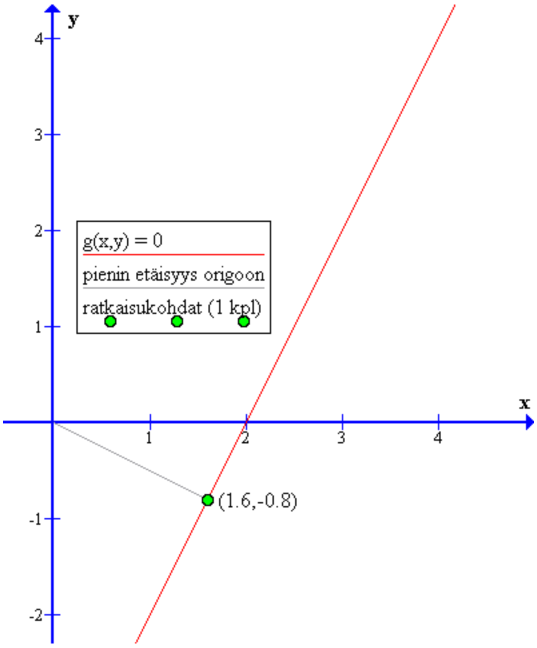
$$\begin{aligned} 2 \cdot (-2y) - y - 4 &= 0 \\ -5y &= 4 \end{aligned}$$

joten $y = -\frac{4}{5} = -0{,}8$. Vastaavasti $x = -2y = \frac{8}{5} = 1{,}6$. Yhtälöryhmän (2)–(4) ainoa ratkaisu on siis

$$\begin{cases} x = \frac{8}{5} \\ y = -\frac{4}{5} \\ \lambda = -x = 2y = -\frac{8}{5} \end{cases}$$

(alin yhtälö on alkuperäisen ongelman ratkaisun kannalta tarpeeton).
Vastaus: funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ pienin arvo suoralla $2x - y = 4$ on

$$f(\tfrac{8}{5}, -\tfrac{4}{5}) = \frac{8^2}{5^2} + \frac{(-4)^2}{5^2} = \frac{64 + 16}{25} = 3\tfrac{1}{5}\,.$$


y
4
3
2
1
-1
-2
x
1
2
3
4
g(x,y) = 0
pienin etäisyys origoon
ratkaisukohdat (1 kpl)
(1.6,-0.8)