8. Integraalilaskentaa

8.1. Integraalifunktio

Derivoituva funktio $F(x)$ on funktion $f(x)$ *integraalifunktio*, mikäli

$$F'(x) = \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

(jolloin $f(x)$ on vastaavasti funktion $F(x)$ derivaattafunktio). Funktio on *integroituva*, jos sillä on integraalifunktio. Integroituvalla funktiolla $f(x)$ on aina äärettömän monta integraalifunktiota, sillä jos $F(x)$ on sen jokin integraalifunktio ja C on mikä tahansa vakio, niin $D(F(x) + C) = F'(x) + 0 = f(x)$ eli myös $F(x) + C$ on funktion $f(x)$ integraalifunktio. Funktion $f(x)$ integraalifunktioille käytetään yhteisesti merkintää

$$\int f(x)\,dx \qquad \text{[nimitys: funktion } f(x) \text{ \textit{määräämätön integraali.}]}$$

Integraalifunktioiden määrittämistä kutsutaan *integroinniksi* ja se on siis derivoinnille käänteinen operaatio. Voidaan osoittaa, että välillä määritelty jatkuva funktio f on aina integroituva ja jos yksi sen integraalifunktioista on F, niin sen **kaikki** integraalifunktiot saadaan yhtälöstä

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C}$$

missä C esittää vapaasti valittavaa vakiota (ns. *integroimisvakio*).

8.1.1 Esimerkki. $\int 3x^2\,dx = x^3 + C$, sillä $Dx^3 = 3x^2$.

8.1.2 Huomioita.

(a) Integroimisessa sovelletaan derivoimiskaavoja nurinpäin.

(b) Integrointi on hankalampaa kuin derivointi. Derivoinnissa on selkeitä sääntöjä, joiden avulla etenkin kaikki alkeisfunktioiden avulla muodostetut funktiot voidaan derivoida. Sen sijaan integrointiin on tarjolla vain keittokirjamaisia reseptejä, **eikä läheskään kaikkia alkeisfunktioista muodostettuja funktioita pystytä integroimaan** (integraalifunktio on kyllä olemassa, mutta se ei aina ole esitettävissä alkeisfunktioiden avulla).

(c) Integroinnissa ei ole tärkeintä, miten integraalifunktio löydetään, sillä **tuloksen voi aina tarkastaa derivoimalla**.

Integraalifunktioiden ”yksiparametrisesta parvesta” $F(x) + C$ voidaan erottaa yksittäinen funktio **alkuehtoa** käyttämällä.

8.1.3 Esimerkki. Määrää kosinifunktion $f(x) = \cos x$ se integraalifunktio, joka saa arvon 1, kun $x = 0$.

Ratkaisu. Kosinifunktion integraalifunktiot ovat

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C \, ,$$

sillä $D \sin x = \cos x$. Haetun integraalifunktion $F(x)$ integroimisvakion C määrää ehto $F(0) = 1$:

$$\sin 0 + C = 1 \;\Rightarrow\; 0 + C = 1 \;\Rightarrow\; C = 1 \, .$$

Haettu integraalifunktio on siis

$$F(x) = \sin x + 1 \, .$$

8.1.4. Integrointisääntöjä

Seuraavat integrointisäännöt seuraavat suoraan vastaavista derivointisäännöistä:

$$\boxed{\begin{aligned} \int a f(x) \, dx &= a \int f(x) \, dx \qquad (a \text{ vakio}) \\ \int (f(x) + g(x)) \, dx &= \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx \end{aligned}}$$

Lausekkeet voidaan siis integroida termeittäin ja kertoimet voidaan siirtää integraalimerkin eteen.

Tärkeimpien alkeisfunktioiden integraalifunktiot:

(1) Vakion integrointi: $\int a \, dx = ax + C \qquad$ (erityisesti $\int 0 \, dx = C$)

(2) $\displaystyle\int x^a \, dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C$, kun vakio a ei ole -1

(3) $\displaystyle\int x^{-1} \, dx = \int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C \quad (x \neq 0)$

(4) $\displaystyle\int e^x \, dx = e^x + C$

(5) $\displaystyle\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

(6) $\displaystyle\int \cos x \, dx = \sin x + C$

(7) $\displaystyle\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + C$

(8) $\displaystyle\int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + C \quad (\cot x = \tfrac{\cos x}{\sin x})$